

초한수(the transfinite)의 형성과 연속체 가설

정 계 섭*

무한소 (infinitesimal)의 반대 방향에서 초한수 (transfinite)라고 불리는 새로운 수학적 대상이 칸토어에 의해 도입되었다. 이 논문에서 3가지 생성원리를 따라 초한수를 축차적으로 구성하는 방법을 소개하고, 초한수 개념과 직접 연관되는 연속체가설에 대해 검토하고자 한다. 초한수는 끝이 없는 과정이 실현된 것으로 보는 입장인데, 이는 철학적 관점이지 수학적 논증이 되기 어렵다고 우리는 본다.

【주요어】 1 : 1 대응, 가산집합, 초한수, 순서형, 극한, 알레프, 결정불가능

1. 들어가면서

무한의 문제와 우주의 무한성은 언제나 인류의 영혼을 사로잡는, 그래서 철학이 풀어야 할 가장 어렵고도 중요한 문제 중의 하나이다. 제논의 역설에서 보듯이 수학에서는 무한이 개입될 때마다 어떤 불확실성이 지배하였다. 뉴턴과 라이프니츠에 의해 개척된 무한소¹⁾ 분석은 경험적 측면과 논리

* 덕성여자대학교

1) 뉴턴과 라이프니츠에 의해 개척된 미적분학은 무한소 (infinitesimal)라고 불린 무한히 작은 양 (Δx)을 포함하고 있었다. 베르누이 (J. Bernoulli)가 “만약 어떤 양이 무한소 만큼 증가하거나 감소하면, 그 양은 증가하지도 않고 감소하지도 않는다”라고 풍자했듯이 이런 모순적인 상황은 엄밀성에 대한 욕구에 반하는 것이어서 19세기에 와서 무한의 개념은 배척을 당하고 함수의 연속을 정의할 때 쓰는 “ $\varepsilon - \delta$ ” 방법이나 극한이론으로 대체되었다. 그러나 1960년 로빈슨

적 측면 두 가지 양상을 띄고 있다. 중요한 물리법칙들이 미분방정식으로 표현된다는 사실에서 알 수 있듯이 그것은 물리학자에게 더할 나위 없는 방법론을 제공하지만, 논리적 측면에서 볼 적에는 만족스럽지 못한 것이 사실이다. 17세기 내내 수학자들은 무한의 개념과 씨름하였다. 달랑베르(D'Alembert)가 “전진하라! 그러면 이해가 따라올 것이다”라고 갈파한 것도 이와 무관하지 않을 것이다.

무한소의 반대방향에서 초한수(transfinite)라고 불리는 새로운 존재자가 칸토어(Cantor, 1845-1918)에 의해 도입되었다. 이 또한 논리학자에게는 새로운 문제를 제공하는 것이다.

이 논문에서 우리는 초한수의 생성 메커니즘과 이와 직접 연관된 연속체 가설을 소개하고자 한다. 우리는 이런 작업이 철학자에게 유익할 것이라고 판단한다. 그러나 인식론적 고려가 개입될 수 있는 기회가 있을 때마다 우리의 입장을 개진하는 노력을 병행하고자 한다.

II. 초한기수

1. 기본개념 환기

두 집합 A, B가 있을 때 A의 각각의 원소에 B의 유일한 원소가 각각 대응할 때, 그리고 역으로 B의 각각의 원소에 A의 유일한 원소가 각각 대응할 때 이 두 집합의 원소들 사이에 1 : 1 대응이 있다고 한다. 이 정의는 유한집합이나 무한집합 모두에게 적용된다.

다음과 같은 정수들의 수열이 있다고 하자.

$$\begin{array}{l} A : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad \cdots \quad n \quad n+1 \quad \cdots \\ B : 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad \cdots \quad 2n \quad 2n+2 \quad \cdots \end{array}$$

(A. Robinson)은 무한소 개념을 엄밀한 근거에서 미적분학에 다시 편입시키는데 성공했다.

$(n+1)$ 이나 $(2n+2)$ 다음에 오는 “...”는 생략해서는 안 되는데 이 두 집합이 무한집합임을 보여주는 지표이기 때문이다. 여기에서 특이한 것은 B가 A의 부분집합임에도 불구하고 A와 B 사이에 1:1 대응이 성립된다는 점이다.²⁾ 이런 경우 두 집합의 농도 (power) 또는 기수 (cardinal number)가 같다고 말한다.

이러한 사실로부터 곧바로 초한수의 정의가 유도되는데 어떤 집합이 그 자신의 부분집합과 같은 농도를 가질 때 그 집합의 농도는 초한수가 된다.

칸토어는 논란이 많은 “무한”이라는 용어를 피하기 위해 초한수라는 신조어를 도입하였는데 이는 유한수 (finite number)를 넘어서 실무한 (actual infinite)으로서, 이 개념의 발상은 실로 혁명적인 것이다.³⁾

어떤 집합이 정수의 집합과 똑같은 농도를 가질 때 즉 그 집합의 원소들을 1 2 3 ... 과 같이 번호를 매길 수 있을 때 그 집합을 가산집합 (denumerable set)이라고 한다. 칸토어는 가산집합들의 농도 (또는 초한기수)를 $\aleph_0$ (aleph-zero)라고 명명하였다. 이것은 히브리어 알파벳의 첫 문자인데, 이는 가산집합이 무한집합들 중에서 가장 작은 집합임을 암시하는 것이다. 정수의 집합 이외에 또다른 주목할 만한 가산집합 중에는 유리수의 집합과 대수적 수 (algebraic number)⁴⁾의 집합이 있는데 이들의 가산성은 집합론의 정리로써 깔끔하게 증명된다.

2. 초한기수들의 연산

-
- 2) 여기에서 대응은 $n \rightarrow 2n$ 으로 나타낸다. 그러나 1:1 대응을 이루는 두 집합 사이에 항상 이런 규칙을 찾을 수 있는 것은 아니다. 예컨대 정수의 집합과 소수 (prime number)의 집합 사이에서 정수집합의 n 번째 요소에 대응하는 n 번째의 소수를 나타내는 공식은 없다.
 - 3) 쿠자누스는 신을 실무한으로 파악하였다. 보다 자세한 것은 졸고 참고. (“쿠자누스의 인식세계”, 한국과학사학회지 제20권 제 2호, 1998년 12월)
 - 4) 정수 계수를 가진 다항식의 근이 되는 수를 대수적 수라 하고, 근이 되지 않는 수를 초월수 (transcendental number)라고 한다. 이 정의는 모든 초월수가 반드시 무리수여야 함을 뜻하는데, 정의에 의해 유리수는 대수적 수이기 때문이다. 초월수의 집합은 따라서 비가산적이며, 초월수 존재를 증명한 공로는 전적으로 칸토어에게 있다.

92 정 계 섭

기수들의 합을 알아보기 위해 다음과 같은 집합이 있다고 하자.

$$\begin{aligned} A &: 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad \cdots \quad 2n \quad \cdots \\ B &: 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad \cdots \quad 2n-1 \quad \cdots \\ C &: 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots \quad n \quad \cdots \end{aligned}$$

A, B, C 세 집합은 정의에 의해 가산집합이고 각각의 농도는 초한기수 $\aleph_0$ 이다. $A \cup B = C$ 이므로 $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ 임을 금방 알 수 있겠다. 따라서 $\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = 2\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ 이렇게 해서 결국 $n\aleph_0 = \aleph_0$ 가 된다. 여기에서 n 의 극한을 취하면,

$$\lim_{n \rightarrow \omega} n \aleph_0 = \aleph_0 \times \aleph_0$$

이것은 $\aleph_0$ 의 곱셈연산이 되는 셈이다. 즉, 각각 $\aleph_0$ 개의 원소를 가진 $\aleph_0$ 개의 가산집합을 고려하는 것이다. 이것의 가산성을 점검하기 위해 “코쉬 (Cauchy)의 대각선법”을 도입하도록 하자.

$$\begin{array}{ccccccccc} A & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & \cdots & a_n & \cdots \\ & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & & & & \\ B & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & \cdots & b_n & \cdots \\ & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & \diagdown & & & & & \\ C & c_1 & & c_2 & & c_3 & & & & & \cdots & & \\ & \diagdown & & \diagdown & & & & & & & & & \\ D & d_1 & & d_2 & & & & & & & & & \\ & \diagdown & & & & & & & & & & & \\ E & e_1 & & & & & & & & & & & \end{array}$$

여기에서 원소들을 하나의 집합으로 모을 수 있다.

$$a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad c_1 \quad b_2 \quad a_3 \quad d_1 \quad a_4 \quad b_3 \quad a_5 \quad \cdots$$

따라서 이 집합도 가산집합임을 알 수 있다.

$\aleph_0^{\aleph_0}$ 은 $2^{\aleph_0}$ 이 되는데 무한집합에서는 다음 식이 성립하기 때문이다.

$$A^A \approx 2^A$$

앞으로 보게 될 것인데 이런 집합은 비가산 집합이다.

3. 비가산 집합

우리는 유리수의 조밀성과 실수의 연속성에 대해 알고 있다. 실수집합은 연속체의 농도를 갖는 집합이다. 이 집합은 비가산 집합이어서 정수의 집합보다 크며 이는 칸토어의 유명한 대각선법에 의해 증명되었다.

연속체의 농도를 c 라 하면,

$$\aleph_0 < c$$

농도가 n 인 집합의 부분집합들의 집합의 농도는 2^n 이고 이는 n 보다 크다. 그래서 정수집합의 부분집합들의 집합의 농도는 $2^{\aleph_0}$ 이고 다음 식이 성립한다.

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$

그런데 $2^{\aleph_0}$ 는 바로 c 가 된다. 여기에 대해 알아보도록 하자.

모든 실수는 10진법으로 표현하면 무한하더라도 0부터 9까지의 수로 이루어지는 무한히 많은 수열로 표현된다. 또 모든 실수는 2진법으로 표현하면 0과 1의 무한수열로 나타낼 수 있다. 즉 임의의 실수의 각각의 자릿수는 0이 아니면 1이다. 실수의 자릿수는 $\aleph_0$ 개 만큼 있으므로 실수집합의 농도는 결국 $\aleph_0 \rightarrow \{0, 1\}$ 가 되어 $2^{\aleph_0}$ 가 된다.

$$c = 2^{\aleph_0}$$

여기에서 자연스럽게 떠오르는 의문은 c 보다 큰 농도를 갖는 초한집합이 있는가의 여부인데, 그 답변은 긍정적이다. 아래의 증명은 캄케 (Kamke)⁵⁾로 부터 빌려온 것인데 우아하고 명료하다.

아래 $[0, 1]$ 에서 $\mathbb{R}$ 로 가는 함수 f 들 전체 집합 F 를 고려하자.

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

이어서 D 를 0과 1의 값만을 취하는 함수들로 구성된 F 의 부분집합이라고 하자. 그리고 D 가 연속체의 농도를 가지고 있다고 가정하자. 이렇게 되면 $[0, 1]$ 에 속하는 모든 실수 u 에 D 의 한 함수 f_u 를 1 : 1 대응시킬 수 있어야 한다.

여기에서 이런 g 함수를 만들어 보자.

$$\begin{aligned} g(u) &= 1, & f_u(u) &= 0 \text{ 일 때,} \\ g(u) &= 0, & f_u(u) &= 1 \text{ 일 때,} \end{aligned}$$

함수 g 는 따라서 어떤 f_u 와도 일치하지 않는다. 그러나 g 는 분명히 D 의 함수이다. 왜냐하면 f_u 만큼의 u 가 있기 때문이다. 모순! 이러한 모순은 D 의 가정이 틀렸음을, 즉 D 는 연속체의 농도를 갖지 않는다는 사실을 증명한다. D 를 포함하는 F 는 당연히 연속체의 농도를 갖지 않으며 이보다 상위이다. CQFD

$$\aleph_0 < c < F$$

이렇게 우리는 세 종류의 초한기수를 확인하였는데, 이 밖에 또다른 초한기수가 존재하는가? 칸토어의 정리에 의해, 집합 x 의 멱집합(power set)의

5) Kamke, 집합론, p. 27

기수는 x 의 기수보다 크므로, 무한개의 초한기수의 존재를 보증한다.

Ⅲ. 초한서수 (Transfinite ordinal number)

1. 순서형(order types)

어떤 집합의 임의의 원소들 a, b 사이에 $a < b$ 또는 $b < a$ 를 빠짐없이 정할 수 있을 때 이 집합은 전순서관계 (total order)를 갖는 집합이라고 한다. 이로부터 곧바로 정렬집합 (ordered set)의 개념이 유도된다.

전순서관계를 가진 집합 E 가 주어지고, 그 집합의 임의의 부분집합 P 를 고려할 때, P 에 최소원소가 있으면 E 는 정렬집합이다.

P 에 속하는 p 가 있고 P 에 속하는 모든 다른 p' 에 대해 $p < p'$ 이 성립할 때 p 를 P 의 최소원소라고 한다.⁶⁾

따라서 정렬집합의 부분집합도 정렬집합이다. 아래의 두 집합 A, B 는 정렬집합이다.

$A : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots$
 $B : 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad \dots$

A 에는 1이라는 최소원소가 있고 B 에는 2라는 최소원소가 있으며 A 나 B 의 어떤 부분집합을 취하더라도 이들은 항상 최소원소를 가지고 있음을 금방 확인할 수 있다.

이런 일이 항상 가능한 것은 아닌데, 유리수의 집합은 순서관계를 갖지만 정렬집합이 아니다. 예컨대 11.55보다 큰 유리수들로 구성된 부분집합에는 최소원소가 없다.

농도의 개념과 순서형의 개념에 대해 주의를 환기시키는 것이 좋겠다. 농

6) Alain Badiou, 수와 수들, p. 71

도의 개념은 원소의 성질이나 순서관계를 추상하는데 반하여 순서형은 원소의 성질만 추상하고 순서관계를 고려한다. 두 집합 M, N 을 보도록 하자.

$$\begin{array}{l} M : 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots \quad n \quad \cdots \\ N : \cdots \quad n \quad \cdots \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

N 은 M 을 뒤집어 놓은 집합이므로 두 집합의 농도는 같다. M 은 최소원을 갖고 마지막 원소가 부재하며, N 에서는 반대로 최소원소가 없고 마지막 원소는 있다. 따라서 M 과 N 은 동일한 순서형을 갖지 않으며 그래서 상사가 아니다. 이처럼 동일한 농도를 갖는 초한집합에서 원소들의 순서를 상이하게 배치하여 우리는 원하는 대로 서로 다른 순서형들을 만들 수 있다. 순서형 개념은 초한수의 연구를 특수한 경우로부터 일반화하는데 아주 중요한 역할을 수행한다.

2. 순서형의 합과 ω (omega)

$\emptyset_1$ 과 $\emptyset_2$ 의 순서형을 갖는 두 집합을 고려하자.

$$\begin{array}{l} \emptyset_1 : \cdots \quad 2n \quad \cdots \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \\ \emptyset_2 : 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad \cdots \quad 2n-1 \quad \cdots \end{array}$$

이로부터 $\emptyset_3$ ($\emptyset_1 \cup \emptyset_2$)라는 새로운 순서형을 만들 수 있다.

$$\emptyset_3 : \cdots \quad 2n \quad \cdots \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad \cdots \quad 2n-1$$

이제 $\emptyset_4$ ($\emptyset_2 \cup \emptyset_1$)을 만들어 보자.

$$\emptyset_4 : 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad \cdots \quad \cdots \quad 6 \quad 4 \quad 2 \quad 0$$

이들 네 가지 순서형은 모두 각각 다르다. 이들은 가산집합의 원소들을 네 가지 서로 다른 방식으로 배열한 것이다.

우리의 관심을 끄는 것은 자연수의 순서대로 배치된 집합 $(N, <)$ 의 순서형이다. 그것은 $\aleph_0$ 의 농도를 갖는 집합이 가질 수 있는 순서형들 중에서 가장 중요한 순서형이기 때문이다. 칸토어는 그것을 ω 라고 명명하였다.

ω 라는 순서형은 하나의 서수인데 이는 유한수의 최대가 아니라 곧 알게 되겠지만 최소의 초한순서수이다. 또한 ω 는 극한순서수이기도 해서 $\omega - 1$ 은 존재하지 않는다. ω 는 어떤 수의 계승자도 아닌 것이다.⁷⁾

이제 순서수의 정의를 도입할 때가 되었다. 정렬집합 그러니까 그 모든 부분집합이 최소원소를 가지고 있는 집합을 서수 (ordinal number)라고 한다.

아래와 같은 서로 다른 세 종류의 초한서수를 검토하자.

$$\begin{array}{llllll} P: & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ Q: & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & \cdots & b_1 \\ R: & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & \cdots & b_1 & b_2 \end{array}$$

이 세 개의 초한서수들의 순서형은 서로 다르다. P에는 마지막 원소가 없고, Q에서는 a의 무한열 다음에 한 개의 원소가 있고, R에서는 a의 무한열 다음에 두 개의 원소가 있다. 그러나 농도의 관점에서 이 초한집합들은 정수와 1 : 1 대응을 확인할 수 있기 때문에 모두 $\aleph_0$ 의 농도를 갖고 있다. 이로부터 아주 중요한 사실을 알 수 있는데 하나의 동일한 초한기수에 대하여 서로 상이한 무수한 서수가 존재한다는 사실이다.

$$|a| \leq a$$

서수의 정의와 이 부등식을 이해하면 기수와 서수의 성질은 완전히 파악한 것이다. 초한서수의 생성에 가기 전에 순서형 $1 + \omega$ 는 $\omega + 1$ 과 다름을 기억해 두자.

$$\begin{aligned} 1 + \omega &= \lim (1 + n) = \lim n = \omega \\ \omega + 1 &= \lim (n) + 1 \end{aligned}$$

7) ω 는 그리스어 알파벳의 마지막 문자로서 그런 사실을 암시한다고 볼 수 있다.

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega$$

$$2 \cdot \omega = \omega$$

3. 초한서수의 축차적 산출

초한서수를 생성하는 첫 번째 원리에는 특별한 것이 없다. 그것은 자연수의 열처럼 선행하는 수에 단위수 1을 더하는 것이다. 아무튼 이 원리에 의해 우리는 원하는 만큼 얼마든지 유한서수를 구성할 수 있으며 이렇게 만들어진 수들을 제 1급의 수라고 한다.

두 번째 생성원리는 극한을 취하는 것인데 바로 원리에 의해 칸토어는 ω 를 구상한 것이다.

“Je l'appelle deuxième principe d'engendrement des nombres réels entiers et je définis plus précisément ce dernier en disant : étant donnée une succession quelconque déterminée de nombres entiers réels définis, parmi lesquels il n'y en a pas qui soit plus grand que tous les autres, on crée en s'appuyant sur ce deuxième principe d'engendrement, un nouveau nombre que l'on regarde comme la limite des premiers, c'est-à-dire qui est défini comme immédiatement supérieur à tous ces nombres.”

실수들의 정해진 수열이 주어졌을 때 그리고 이 수들 중 수열이 모든 수들보다 더 큰 수가 없을 때 두 번째 생성원리에 의해 우리는 새로운 수를 창조하는데 이 수는 그 수열의 극한, 즉 수열의 모든 수들보다 바로 상위의 수이다.⁸⁾

ω 는 첫 번째 생성원리에 의해 만들어진 수가 아니라는 점을 강조하자. 다른 말로 하자면 ω 는 $\omega - 1$ 에 1을 더해서 만들어진 수가 아닌 것이, 그런 수는 존재하지 않기 때문이다. ω 는 그러니까 자연수열에 내재적인 것이 아니라 초월적인 것이다.

8) Nathalie Charraud, 무한과 무의식, p. 96

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots \quad n \quad \cdots \quad \omega$$

ω 는 모든 유한수 다음에 곧바로 오는 수, 즉 모든 유한수의 극한값이자 최초의 초한서수인 것이다. 우리는 이렇게 제 1급의 순서수들을 형성했는데, 이는 제 2급의 순서수를 생성하기 위한 전제조건으로서 칸토어는 이를 제한원리 (principle of limitation)라고 불렀다.

According to this principle, the *second class* of ordinals is to consist only of those whose predecessors, from 1 upwards, form a series of the first power, i.e. a series whose cardinal number is $\aleph_0$, or one whose terms, in a suitable order, have a one-one relation to the finite integers. It is then shown that the power, or cardinal number, of the second class of ordinals as a whole, is different from $\aleph_0$, and is further the very next cardinal number after $\aleph_0$.⁹⁾

제 2급의 순서수가 생성되면 그때에야 비로소 제 3급의 순서수에 진입할 수 있고 계속해서 이런 식이다. 따라서 제한원리는 사실 보다 큰 서수를 만들어도 좋다는 보증서인 셈이다.

이제 ω 에 첫 번째 원리를 적용하면,

$$Z: \omega + 1 \quad \omega + 2 \quad \omega + 3 \quad \cdots \quad \omega + n \quad \cdots$$

이 되고 여기에 두 번째 원리를 적용해서 $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ 를 만드는데 이 수는 Z 수열의 모든 수들 바로 다음에 오는 상위의 서수이다. 이런 수들은 제 2급의 순서수라고 한다. 아래의 수들이 그런 수이다.

$$\omega \quad \omega + 1 \quad \cdots \quad \omega + n \quad \cdots \quad \omega \cdot 2 \quad (\omega \cdot 2) + 1 \quad \cdots \quad \omega \cdot 3 \quad \cdots \quad \omega \cdot \omega \quad \cdots$$

ω^2 에 다시 첫 번째 원리를 적용하면,

9) Russell, 수학원리, p. 314

100 정 계 섭

$$\omega^2 + 1 \quad \omega^2 + 2 \quad \cdots \quad \omega^2 + n \quad \cdots \quad \omega^2 + \omega$$

이어서

$$\begin{array}{ccccccc} \omega^2 + \omega + 1 & \cdots & \omega^2 + \omega + n & \cdots & \omega^2 + \omega \cdot 2 & \cdots \\ \omega^2 + \omega \cdot n & \cdots & \omega^2 + \omega \cdot \omega & = & \omega^2 \cdot 2 \end{array}$$

다음에

$$\omega^2 \cdot 2 + 1 \quad \cdots \quad \omega^2 \cdot 2 + \omega \quad \cdots \quad \omega^2 \cdot 3 \quad \cdots \quad \omega^2 \cdot n \quad \cdots \quad \omega^2 \cdot \omega \quad (= \omega^3)$$

계속해서 생성원리를 적용하면 다음과 같은 새로운 수열이 생긴다.

$$\omega \quad \omega^2 \quad \omega^3 \quad \omega^4 \quad \cdots \quad \omega^n \quad \cdots \quad \omega^\omega$$

다시 원리를 적용해서

$$\omega^\omega + 1 \quad \cdots \quad \omega^\omega \cdot 2 \quad \cdots \quad \omega^\omega \cdot 3 \quad \cdots \quad \omega^\omega \cdot n \quad \cdots \quad \omega^\omega \cdot \omega \quad (= \omega^{\omega+1}) \quad \cdots$$

$$\omega^{\omega+1} \cdot 2 \quad \cdots \quad \omega^{\omega+1} \cdot 3 \quad \cdots \quad \omega^{\omega+1} \cdot \omega \quad (= \omega^{\omega+2}) \quad \cdots \quad \omega^{\omega+3} \quad \cdots \quad \omega^{\omega+\omega} \quad \cdots$$

$$\omega^{\omega \cdot 2} \quad \cdots \quad \omega^{\omega \cdot 2+1} \quad \cdots \quad \omega^{\omega \cdot 3} \quad \cdots \quad \omega^{\omega \cdot 4} \quad \cdots \quad \omega^{\omega \cdot n} \quad \cdots \quad \omega^{\omega \cdot \omega} \quad (= \omega^{\omega^2}) \quad \cdots$$

$$\omega^{\omega^3} \quad \cdots \quad \omega^{\omega^3} \quad \cdots$$

이처럼 구성된 수들은 제 2급의 순서수들인데 이들은 모두 농도가 $\aleph_0$ 라는 공통적인 특징을 지니고 있다. 정리를 하자면,

가산 초한서수

$$\omega$$

$$\omega + 1$$

$$\omega + 2$$

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega$$

순서형

$$a \quad b \quad c \quad \cdots$$

$$a \quad b \quad c \quad \cdots \quad a$$

$$a \quad b \quad c \quad \cdots \quad a \quad b$$

$$a \quad b \quad c \quad \cdots \quad a \quad b \quad c \quad \cdots$$

$$\omega^2 = \omega \times \omega = \omega + \omega + \dots \omega \dots \quad a \ b \ c \dots a \ b \ c \dots a \ b \ c \dots$$

이제 제 2급의 순서수들은 $\{ \alpha \mid \alpha < \Omega \}$ 로 나타낼 수 있다. 이들을 차례대로 나열하면,

$$\omega \quad \omega + 1 \quad \dots \quad \omega \cdot n \quad \dots \quad \omega^2 \quad \dots \quad \omega^\omega \quad \dots \quad \omega^\omega$$

제 2급의 순서수들의 집합을 고려하게 되면 이 집합 역시 정렬집합임을 알 수 있겠다. 왜냐하면 전순서관계를 지니고 있고 임의의 어떤 부분집합도 최소원소를 가지고 있기 때문이다. 달리 표현해서 말하자면, 가산적 집합들의 가산적 모임의 합집합은 자연수의 집합과 1:1 대응을 이루므로 역시 가산이다.

정의상 $\aleph_1$ 은 제 2급 순서수에 속하지 않는다. 그래서 비가산인데 만약 가산이라면 $\aleph_1$ 은 제 2급 수들의 집합의 원소가 되어야할텐데 이는 모순이다. 이를 증명하자. 집합 A가 최대원소를 가지고 있을 때, $\sup A$ 는 최대원소에 단위수 1을 더한 수가 되고, 그렇지 않으면 $\sup A$ 는 A에 있는 모든 원소들의 합집합이라고 하자. $\aleph_1 = \{ a_0, a_1, a_2 \dots \}$ 일 때, $\aleph_1 = \sup \{ a_0, a_1, a_2 \dots \}$ 가 다시, $\aleph_1$ 의 원소라면 $\aleph_1 < \sup \aleph_1 = \aleph_1$ 가 되어 모순이다. $\aleph_1$ 의 원소들은 모두 가산이기 때문에 $\aleph_1$ 는 첫 번째 비가산기수가 되고 순서형은 Ω 로 정의한다.

IV. 연속체 가설

1. 알레프(Alephs)의 생성

이제까지의 논의를 요약하자면, 1은 제 1급의 순서수 중 첫 번째 수이고 제 1급 수들은 정수의 집합이므로 그 농도는 $\aleph_0$ 이다. ω 는 제 2급 수 중의 첫 번째 수이고 제 2급 수들의 농도는 각각 $\aleph_0$ 이고, 이들의 집합의 농도 역시 $\aleph_0$ 임을 위에서 보았다. $\aleph_1$ 도 제 2급 수 너머에 있는 수의 농도로서 그 순서형 Ω 는 제 3급 수의 첫 번째 순서수이다. 이렇게 알레프들은 다시

초한수열을 이룬다.

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n \quad \cdots \quad x_\omega$$

그런데 앞에서 우리는 다음의 부등식을 확인하였다.

$$x_0 < c < F$$

여기에서 제기되는 문제는 c 나 F 가 알레프인가 아닌가의 여부이다. 특히 칸토어는 x_0 와 연속체의 농도 c 사이에 또다른 알레프가 존재하는지의 문제와 씨름하였다. 알레프들의 곱으로는 차원이 격상하지 않지만 지수화 연산은 차원을 높이기 때문에 그리고 $c = 2^{x_0}$ 라는 사실을 알고 있기에 칸토어는 직관적으로 c 가 x_0 다음에 오는 x_1 여야 할 것 같았고, 그래서 이를 증명하고자 했다.

$$2^{x_0} = x_1$$

이 진술을 연속체가설이라고 한다. 1908년 Hausdorff가 일반연속체 가설을 제안하였다.

$$2^{x_\alpha} = x_{\alpha+1}$$

그러나 수학에서 직관에 의존한다는 것은 위험하기 짝이 없는 일이다.

그래서 칸토어는 이를 증명하기 위해 그야말로 악전고투를 했다고 한다. 이 가설이 참이라는 증명을 발견했다고 확신하고 나서 몇 주 후에는 x_0 과 c 사이에 무수히 많은 알레프들이 있다는 반대의 증명을 얻었다고 확신하는 그런 식으로 말이다. 칸토어의 접근 방법에 논리적으로 어떤 문제가 있었던 것은 아닐 것이다. 다만 칸토어가 모르고 있던 사실이 있었는데, 그것은 그가 결정불가능한 명제를 풀려고 했다는 것이다.

2. 결정불가능한 명제

칸토어 이후 집합론이 형식화되었는데 이를 공리적 집합론 또는 통상 ZF-집합론이라고 부른다. 이때에 괴델 (1938년)에 의해 아주 중요한 발견 (발명?)이 이루어졌는데, 만일 ZF-집합론이 무모순이라면 연속체가설을 공리로 추가한 집합론 역시 무모순이라는 것이다. 이렇게 되면 연속체가설은 무해한 셈이다.

다른 한편 1963년 코언 (Cohen)은 보다 더 멀리 나아갔다. 즉, ZF-집합론이 무모순이라면 연속체가설의 부정을 공리로 추가한 집합론도 무모순이라는 것이다. 연속체 가설의 부정도 역시 무해한 것이다!

이러한 결정불가능성은 그러나 역설은 아니다. 왜냐하면 이 가설은 ZF-집합론과는 독립적¹⁰⁾이어서 후자는 전자에 아무런 개입도 하지 않기 때문에 예 모순이 아니기 때문이다.

그러나 이러한 비결정성은 논리적으로 만족스럽지 못한 상황이며 당혹스러운 것이다. 크로네커는 “신은 정수를 만들었고 나머지는 모두 인간의 작품이다.”라고 갈파한 바 있는데 그와 같은 구성주의자들에게 있어서 반대되는 두 명제 중 마음대로 아무 것이나 수용할 수 있다는 것은 도무지 마음에 내키지 않을 것이다. 개념실재론자인 플라톤주의자들에게 이 가설의 긍정이나 부정으로부터 나오는 결과들은 공상과학소설에 속하는 것쯤으로 여겨질 것이다.

이 가설의 비결정성은 근본적으로 실무한 이론 자체를 의문시하게 만드는 단서를 제공하게 때문에 이러한 상황에서 어떤 출구를 찾을 수 있는지를 결론에 대신하여 개진하고자 한다.

10) 하나의 명제 p 는 이론 T 내에서 증명될 수도 반증될 수도 없을 때 T 와 독립적이라고 한다. 통사론적으로, P 는 $T + \sim P$ 가 모순일 때 T 에서 증명가능하다고 한다. 의미론적으로, P 는 $T + \sim P$ 가 모델을 가지고 있지 않을 때 T 의 논리적 귀결이다. 즉 T 의 공리들을 만족시키는 모든 모델은 p 도 만족시킨다. 어떤 적형식 F 가 해석 I 에 대해서 참일 때 I 를 F 의 모델이라고 한다. 하나의 이론 T 의 모델이란 T 의 모든 적형식들을 참으로 만드는 해석을 말한다. 괴델의 완전성 증명은 통사론적 관점과 의미론적 관점이 동치라는 사실을 보여준다.

V. 결론에 대신하여

만일 ZF-집합론이 수학 기호들을 가지고 벌리는 자의적인 유희가 아니고, 또한 실무한에 대한 이해를 제공하는 참된 이론이라면 두 가지 가능성을 생각할 수 있겠다.

그 첫째는 연속체가설을 포기하는 것이다. 그 이유는 $\aleph_1$ 이 자의적인데 반하여 연속체 농도 c 는 멱집합의 공리가 보증한다는 것이다. 좀 길지만 사안의 중요성에 비추어 모두 인용하겠다.

A point of view which the author feels may eventually come to be accepted is that CH is obviously false. The main reason one accepts the Axiom of Infinity is probably that we feel it absurd to think that the process of adding only one set at a time can exhaust the entire universe. Similarly with the higher axioms of infinity. Now $\aleph$ is the set of countable ordinals and this is merely a special and the simplest way of generating a higher cardinal. The set C is, in contrast, generated by a totally new and more powerful principle, namely the Power Set Axiom. It is unreasonable to expect that any description of a larger cardinal which attempts to build up that cardinal from ideas deriving from the Replacement Axiom can ever reach C . Thus C is greater than $\aleph_n$, $\aleph_w$, $\aleph_a$, where $a = \aleph_w$, etc. This point of view regards C as an incredibly rich set given to us by one bold new axiom, which can never be approached by any piecemeal process of construction. Perhaps later generations will see the problem more clearly and express themselves more eloquently.¹¹⁾

코옌은 $\aleph_1$ 에 대하여 존재론적 이의를 제기하고 있다. 문제는 이렇게 되면 기존의 적지 않은 집합론의 성과들을 전면적으로 재검토 내지는 포기해야 하는데, 아무런 모순이 나타나지 않은 상황에서 이것은 너무 비용이 드는 일일 것이다.

11) Paul Cohen, 집합론과 연속체가설, p. 151

두 번째 길은 ZF-집합론이 훌륭하기는 하나 불완전하다는 입장이다. 여기에는 무언가 아직 알려지지 않은 공리가 있어서 논리학자들은 모름지기 이 공리를 찾아내어 거기에 추가해야 한다는 것이다. 그렇게 되면 연속체 가설의 긍정이나 부정 중 하나는 증명할 수 있으리라는 희망에서이다. 이것은 진지한 리서치 프로그램으로서 괴델이 옹호한 길이다.

끝으로 우리는 실무한의 존재론적 위상에 대해 생각하지 않을 수 없는 데, 여기에서 대비되는 것이 $\sqrt{-1}$ 이다. 주지하는 바처럼 $\sqrt{-1}$ 은 우리의 상상력 밖에서는 존재하지 않지만 수학은 물론이고 전자기학 분야에서 필요불가결한 존재자이다. 그러나 예컨대 $\aleph_1$ 은 어떠한가? $\aleph_1$ 나 ω 가 무한소나 허수와 같은 위상을 가질 날이 올 것인가?

참 고 문 헌

- Aczel Amir, *Mystery of aleph* (신현용 · 송영조 옮김, 무한의 신비), 승산, 2002
- Badiou Alain, *Le Nombre et les nombres*, Seuil, 1990
- Belna Jean-Pierre, Cantor, *Les Belles Lettres*, 2000
- Bolsano Bernard, *Les paradoxes de l'infini*, Seuil, 1993
- Cantor, "Lettres à Dedekind des 28 juillet, 28 et 31 août 1899" *Logique et fondement des mathématiques, Anthologie (1850-1914)*, Payot, 1992, pp. 206-214
- Charraud Nathalie, *Infini et Inconscient, Essai sur Georg Cantor*, Anthropos, 1994
- Cohen P. J., *Set theory and continuum hypothesis*, W. A. Benjamin, 1966
- Gödel K., "칸토르의 연속체 문제는 무엇인가?", *Philosophy of Mathematics* (Benacerraf P. and Putnam H (ed.), 박세희 옮김), 아카넷, 2002, p. 725-749
- Guillen Michael, *Bridges to infinity*, Jeremy P. Tarcher, Inc, 1983
- Kamke E., *Théories des ensembles*, Dunod, 1964
- Kaufmann Felix, *The infinite in mathematics*, D. Reidel, 1978
- Maor Eli, *To infinity and Beyond* (전대호 옮김, 무한 그리고 그 너머), 사이언스북스, 1997
- Monnoyeur Françoise (éd.), *Infini des mathématiciens et infini des philosophes*, Belin, 1992
- Rucker Rudy, *Infinity and Mind*, Birkhäuser, 1982
- Russell B., *The Principles of Mathematics*, George Allen & Unwin, (1903) 1979
- _____, *Introduction à la philosophie mathématique*, Payot, 1991 (1919)
- Tiles Mary, *The philosophy of set theory, An Introduction to Cantor's paradise*, Basil Blackwell, 1989
- Verdier Norbert, *L'infini en mathématiques*, Flammarion, 1997