

## 공간론에서 힐베르트와 카르납\*†

전 영 삼‡

일반적으로는 잘 알려져 있지 않지만, 카르납에 관한 최근의 활발한 재조명에 따르면, 지난 19세기 말과 20세기 초 수학과 논리학이 눈부시게 발전하는 과정에서 카르납은 생각보다 훨씬 더 힐베르트에 밀접히 연결되어 있었던 것으로 드러나고 있다. 이러한 역사적 배경하에 본 논문에서는 특히 공간론을 전개함에 있어 두 사람의 핵심적 논점이 힐베르트식의 암묵적 정의 방식에 놓여 있다고 보고, 공간론을 전개하는 데 과연 그러한 정의 방식이 적절한지의 여부를 카르납의 관점에서 해명하고 검토하고자 한다. 이러한 논의의 결과, 암묵적으로 정의된 용어들의 의미가 명료해지기 위해서는 해당 용어들을 정의해 주는 공리 체계가 고계 논리로 표현되고 그것이 절대성을 지녀 의미론적으로 완전할 필요가 있다는 것이 힐베르트식의 공간론에 대해 적어도 카르납이 기여할 수 있는 한 가지 분명한 결론임을 보여 주고자 한다.

【주요어】 힐베르트, 카르납, 공간론, 암묵적 정의, 의미론적 완전성

수학 철학에 관한 일반론에서 힐베르트와 카르납은 흔히 각기 형식주의와 논리주의를 대표하는 인물로 분리되어 논의되곤 한다. 과학 철학 분야에서도, 카르납을 논할 경우, 그가 어떻게 힐베르트와 관련되었는가는 거의 알기 어렵다. 하지만 카르납에 관한 최근의 활발한 재조명에 따르면,<sup>1)</sup>

\* 접수완료: 2008.10.19/심사 및 게재확장: 2008.11.28/수정완성본접수: 2008.12.10

† 이 논문은 2007년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2007-321-A00025). 모두 받아들이 수는 없었으나, 심사위원들의 중대한 지적에 감사드린다.

‡ KAIST 수학 철학 연구실

1) 예컨대 Giere & Richardson (eds.) 1996; Friedman 1999; Parrini et al. (eds.) 2003; Awodey & Klein (eds.) 2004; Friedman & Creath (eds.) 2007 참조.

## 2 전 영 삼

지난 19세기 말과 20세기 초에 걸쳐 수학과 논리학이 눈부시게 발전하는 과정에서 카르납은 생각보다 훨씬 더 힐베르트에 밀접히 연결되어 있었던 것으로 드러나고 있다. 당시 그러한 발전에 빼놓을 수 없는 인물인 프레게가 두 사람 모두와 직접 교류가 있었다는 사실도 이를 예증한다. 그러므로 지난 세기 수학 및 논리학을 좀더 깊이 이해하는 데서뿐만 아니라, 앞으로 그 분야들의 발전 방향을 가늠하는 데에도 두 사람을 관련지어 검토하는 일은 매우 의의가 크다 할 것이다. 이러한 맥락에서 본 논문에서는 특히 공간론을 둘러싸고 힐베르트의 이론에 대해 카르납이 어떻게 반응했는가를 문제의 역사적 배경으로 삼고자 한다.<sup>2)</sup>

기하학은 공간론의 하나로서, 공간의 특성을 다루는 수학의 한 분야이다. 주지하는 대로, 힐베르트는 나름의 공리적인 방법을 적용해 기하학을 하나의 형식적 공리 체계로 새로이 구성하고자 하였다. 기하학에 대한 이러한 접근은 나름의 장점을 갖긴 하나, 해당 공리들이 규정하는 원초적 용어(primitive term)들이 과연 분명한 의미를 지닐 수 있는가에 관해서는 일찍부터 논란이 야기되어 왔다.

카르납은 그의 철학 초기부터, 힐베르트가 제시한, 공리들에 의한 원초적 용어의 정의, 이른바 ‘암묵적 정의’(implicit definition)의 문제를 잘 알고 있었던 것으로 드러나고 있다. 본 논문에서 나는 공간론을 둘러싼 힐베르트와 카르납 사이의 주요한 논점이 암묵적 정의에 놓여 있다고 보고, 힐베르트식의 암묵적 정의의 방식이 공간론을 전개하는 데 과연 적절한지의 여부를 카르납의 관점에서 해명하고 검토하고자 한다.

물론 최근 카르납의 연구자들 사이에서는 과연 그의 철학이 힐베르트의 암묵적 정의의 방식을 올바르게 평가할 수 있는가에 관해 의견이 엇갈리고 있다. 카르납의 견해를 검토하는 과정에서, 나는 연구자들의 의견이 그처럼 엇갈릴 수밖에 없는 까닭을 드러내고, 결론적으로 공간론에서 암묵적 정의의 방식을 개발하는 데 카르납이 기여할 수 있는 바를 보이고자 한다.

---

2) 상대적으로 힐베르트는 카르납에 대해 직접적인 반응을 거의 보이지 않은 것으로 알려져 있다.

## 1. 기하학에서 힐베르트의 암묵적 정의

적어도 1900년 이전에 기하학은 힐베르트의 주요 관심사는 아니었다. 하지만 괴니히스베르크와 괴팅겐에서의 일련의 기하학 강의 끝에 그는 마침내 1899년 기하학에 자신의 공리적 방법을 적용한 『기하학의 기초』(*Grundlagen der Geometrie*)를 발간하게 된다. 그가 이 저술에서 공리적 방법을 염두에 둔 까닭은 무엇보다 그 서론에서 찾아볼 수 있다.

기하학은, 산수와 마찬가지로, 그 논리적 전개를 위해 단지 적은 수의 단순한 근본 원리만을 필요로 할 뿐이다. 그러한 근본 원리를 공리라 부른다. 이러한 공리들을 어떻게 선택하고 그것들 사이의 관계가 무엇인가를 탐구하는 일이야말로 유클리드 시대 이래로 수학적 문헌들에서 찾아볼 수 있는 수많은 훌륭한 논문들에서 논의해 왔던 문제이다. 이러한 문제는 곧 <공간에 관한 우리의 직관을 논리적으로 분석하는 일(logical analysis)>에 다름 아니다. (Hilbert 1899a/2007, p. 1, 강조 필자)

이로 볼 때, 그가 기하학에 공리적인 방법을 적용한 명시적인 이유는 적어도 기하학에 관한 논리적 접근을 위한 것이다. 이를 위해 그는 우선 다섯 가지의 서로 다른 공리군(群)으로부터 출발한다. 그리고, 이미 위의 인용문에서도 드러나듯, 그 “각각의 공리들은 우리 직관의 서로 관련된 어떤 근본적 사실(certain related fundamental facts of our intuition)을 표현하고 있는” (§1) 것으로 본다. 적어도 이 점에서라면, 그는 유클리드 이래 공리에 대한 전통적 시각에서 크게 벗어나지 않는 것으로 보인다. 하지만 그는 이어지는 대목들에서 그러한 공리들이 또한 원초적 용어들이 나타내는 개념을 정의해 주고 있는 것으로 보고 있다. 곧 어떤 원초적 용어를 포함한 여러 공리들이 하나의 해당 용어를 정의해 주고 있는 것으로 보고 있는 것이다. 예컨대 그는 (모두 ‘... 사이’(between)라는 용어를 포함하고 있는) 제2군에 속하는 순서의 공리들(axioms of order)이 ‘... 사이’라는 개념을 정의해 주며 (§3), (모두 ‘합동’이라는 용어를 포함하고 있는) 제4군에 속하는 합동의 공리들(axioms of congruence)이 합동이나 이동의 개념을 정의

해 주고 있다고 말한다(§6). 요컨대 그에게 있어서는 기하학의 공리들이 공간에 관한 어떤 직관의 근본 사실을 표현하는 외로도 기하학의 원초 용어들에 대한 정의의 한 요소가 되기도 하는 셈이다. 공리의 기능에 대한 힐베르트의 이와 같은 생각은, 적어도 공간에 관한 일상의 직관에 바탕을 두고 원초 용어들을 독립적으로 정의함으로써 시작하고 있는 종래의 유클리드식 공리 체계의 발상<sup>3)</sup>과는 매우 다른 것이다.

하지만 과연 공리가 원초적 개념들을 정말로 정의할 수 있는 것인가? 이러한 의문은 힐베르트가 『기하학의 기초』를 발간한 이래 누구보다도 먼저 프레게가 적극적으로 제기한 의문이다.<sup>4)</sup> 프레게에 따르면, 공리를 정의의 한 요소로 보는 일은 애초에 공리의 성격에 대한 힐베르트 자신의 규정(그리고 또한 프레게 자신이 받아들이는 규정), 즉 그것이 우리 직관의 근본적인 사실을 표현한다는 점과는 상충하는 것이다.

만일 [공리들이 진정으로 우리 직관의 근본적인 사실을] 표현하는 것이라면, 그것은 [결국] 무엇인가를 주장하는 셈이다. 하지만, 이렇게 된다면, 그것은 그 공리들 안에 나타나는 모든 표현들이 이미 완벽하게 이해되었음을 뜻한다. 그러나 만일 공리들이 정의의 요소가 된다면, 그것에는 예컨대 “점”, “직선”과 같은 표현이 포함될 것이나, 그것이 지시하는 바는 아직 고정되어 있지 않고 여전히 결정되어야 할 상태일 것이다.  
(Frege 1903/60, p. 7)

이와 관련해 프레게가 들고 있는 다음과 같은 예(ibid.)는 그의 견해를 좀더 명료히 하는 한편, 이후 우리의 논의를 위해 유용하므로, 좀더 자세히 살펴보기로 하자. 예컨대 ‘직사각형은 한 각이 직각인 평행사변형이다’라는 정의를 취해 보기로 하자. 만일 이러한 정의를 힐베르트식으로 바꿔 쓴다

3) 유클리드 기하학 체계에서는 ‘점’, ‘선’ 등에 대한 정의로부터 출발하고 있다. 예컨대 ‘점은 아무런 부분도 갖지 않는 그 무엇이다’라는 식이다(Froese 2007, p. 9).

4) 프레게는 힐베르트의 『기하학의 기초』 발간 직후부터 이러한 문제를 갖고 힐베르트와 몇 차례 서신 왕래를 하였으나, 힐베르트가 곧 더 이상 이러한 문제에 응대하지 않자, 1903년 독일 수학 협회지에 독자적으로 문제를 제기하는 논문(Frege 1903/60)을 발표하게 된다(Corry 2004, §2.4).

면, 그것은 예컨대 다음과 같이 될 것이다.

설명: 직사각형이라 부르는 평면 도형을 생각해 보자.

공리 1. 모든 직사각형은 평행사변형이다.

공리 2. 모든 직사각형에는 서로 수직인 한 쌍의 변이 있다.

이러한 두 공리는 서로 불가분의 관계에 있다. 만일 공리 1을 빼 버린다면, 우리는 ‘직사각형’이라는 용어에 다른 지시체를 부여하게 될 것이다. 왜냐하면 남은 공리 2는, 만일 그것을 그 자체로 완벽한 정의 명제로 본다면, 원래 공리 1과 더불어 갖고 있던 의미와는 다른 의미를 갖게 될 것이기 때문이다(서로 수직인 한 쌍의 변을 지닌 평면 도형은 우리가 통상 알고 있는 직사각형 이외에도 무수히 많을 것이다). 그러므로 위에서처럼 두 공리가 함께 주어진다면, 우리는 물론 그 공리들이 참이라고 할 수는 있다. “하지만 그것들의 참은 직관에 근거한 것이 아니라 [직사각형에 관한 위와 같은] 정의에 근거한 것이다. 이러한 이유로 그것들은, 통상의 의미로 분명 공리들이 그러한 것과는 달리, 어떤 실재적 지식(real knowledge)을 전혀 갖지 않는 것이다.”

프레게의 이와 같은 비판에 대해 힐베르트는 실제 아무런 반응도 보이지 않은 것으로 알려져 있다. 그러나 오늘날 힐베르트의 입장에서 보았을 때, 과연 프레게가 힐베르트의 새로운 시도가 갖는 의의를 제대로 파악했는가에 관해서는 논란이 있을 수 있다.<sup>5)</sup> 물론 당시에는 힐베르트 자신마저도 그의 새로운 시도가 공리의 성격에 관해 전적으로 새로운 측면을 열어주고 있다는 사실을 충분히 인식하지 못하고 있었던 것으로 보인다. 그러므로, 프레게가 지적하는 대로, 힐베르트는 자신이 제시한 공리들이 원초적 용어를 정의해 준다고 말하면서도, 공리에 대한 프레게의 생각과 마찬가지로 그것들이 우리 직관의 근본 사실을 표현한 것이라고 말함으로써<sup>6)</sup>

5) 물론 이것은 반대의 방향으로 생각해 볼 수도 있을 것이다. 힐베르트와 프레게 사이의 이와 같은 논란과 그 이유에 관한 좀더 상세한 논의를 위해서는 예컨대 최원배 2008 참조.

6) 당시 힐베르트의 이와 같은 불철저성은 그의 다른 문헌에서도 종종 발견되는 점

프레게의 반박을 자초한 셈이다. 오늘날 힐베르트의 입장을 해명하는 방식의 하나로 치하라는 예컨대 다음과 같이 말하고 있다(Chihara 2004, p. 31). 이제 앞서와 같은 힐베르트의 기하 이론이 하나의 형식화된 1계(first-order) 이론으로 개발되었다고 해 보자. 이 경우, 그의 기하 공리들은 1계 술어 논리로 형식화된 연역 논리상의 공리가 될 것이다. 여기서 ‘점’, ‘선’, ‘면’과 같은 원초적 용어들은 그 연역 체계의 어휘를 가운데 비논리적 상항(non-logical constant)으로 볼 수 있다. 이 때 주어진 공리들을 만족하며 형성된 1계 논리 구조 속에서, 그 비논리적 상항들은 해당 논리 구조의 영역 내에 있는 어떤 대상들을 지시하게 되는데, 이러한 대상은 일정한 방식으로 서로 연관되게 마련이다. 그러므로 이러한 의미로 힐베르트의 공리들은 그 비논리적 상항들을 ‘암묵적으로 정의’하고 있는 것으로 볼 수 있다는 것이다.

공리에 의한 암묵적 정의의 개념 자체는 사실 힐베르트보다 훨씬 이전에 프랑스의 기하학자인 제르곤느(J. D. Gergonne)에 의해 1818년 무렵에 도입된 것으로 알려져 있다. 하지만 그것은 곧 잊혀지고, 본격적으로 논의될 기회를 갖지 못하였다.<sup>7)</sup> 이러한 암묵적 정의를 인식론의 맥락에서 재조명하고 힐베르트식의 정의의 중요성을 부각시킨 이는 논리 실증주의자 술릭이다. 술릭의 논의는 사실상 카르납이 암묵적 정의에 관해 본격적으로 자신의 견해를 피력하는 데 그 출발점이 되고 있으므로 좀더 상세히 살펴보기로 하자.

---

이다(Chihara 2004, pp. 38-9 참조).

7) 그 이유와 역사적 과정에 관해서는 Otero 1970 참조. 대략적으로 말해, 그의 암묵적 정의는, 명시적 정의와는 달리, 정의된 용어들이 지시하는 바가 무엇인지 애매하여 그에 해당하는 개념이 불신을 받고 결국 쓸모없는 것으로 간주되었다는 것이다.

## 2. 술릭의 관점에서의 암묵적 정의

술릭에게서 그의 인식론을 형성하는 데 결정적인 역할을 한 것은 상대성 이론과 같은 당대의 새로운 과학이었다. 그가 보기에, 그러한 과학에서 말하는 시공간은 이미 우리의 경험적 지각에 포착되는 시공간과는 다른 것이었다. 후자는 우리의 직접적이며 구체적인 시공간적 체험으로서, 그 자체 주관적이며 흘러가는 것인 반면, 전자는 객관적이며 상호 소통 가능한 것으로 보였기 때문이다. 술릭의 인식론에서 그 근본 문제는 바로 이처럼 차이나는 시공간에 대한 인식의 근본 원인이 무엇인가를 해명하는 일이었다.

이러한 작업의 일환으로 그에게 중요했던 바는 단순히 주관적인 경험(Erleben)과 객관적 인식(Erkennen)의 구별이었다(Schlick 1926, p. 146ff.). 정의하기도 어렵고 기술하기도 어려운 시간의 경험은 시간을 추정하는 데에는 편리한 수단이나, 하나의 물리학적 원리로서 시간을 객관적으로 정의하는 데에는 결코 좋은 수단이 될 수 없다. 마찬가지로 단순히 공간에 관한 주관적인 경험으로 상대성 이론에서와 같은 객관적 공간을 정의할 수는 없다(Hung 1949, p. 691 참조).

이러한 상황에서 술릭은 그러한 객관적 인식의 가능성을 우리의 개념구성 능력에서 찾았다. 그에게 개념이란 “단순히 기호일 뿐이며, 어떤 대상에 대응되었을 때에야 비로소 의미를 얻게 [되는 그 무엇이다]. [...] 개념은 그 자체 아무런 내용도 지니지 않으며, 따라서 그것이 무엇인가를 지시하기 이전이라면 그것은 아무 것도 아니다”(Schlick 1925/85, p. 358-9). 그러므로 어느 면 감각적 지각에 의한 표상에서와 마찬가지로 개념 역시 우리 자신과 세계의 일면을 연결시켜 주는 그 무엇이기는 하다. 하지만 그 이전에 그것은 명확히 규정되는 그 무엇이며, 바로 이 점에서 그것은 단순히 주관적인 감각 표상의 차원에 머물지 않고 객관적인 그 무엇으로 전환될 수 있는 것이다(Coffa 1991, p. 175 참조).

따라서 술릭에게서 제대로 된 지식은 결코 우리의 지각적 경험이 아닌

우리 스스로 규정한 형식적 개념 체계에 놓일 수밖에 없다. 하지만 그러한 개념을 어떻게 구성할 수 있는 것인가. 술릭은 그것이 정의의 방식에 의해 가능하다고 본다. 그것은 감각적 지각에서처럼 수동적으로 주어지는 대신, 우리 자신의 능동적 제시에 의해 이루어진다. 그러나 같은 정의라 할지라도 명시적 정의(explicit definition)는 궁극에 있어 우리가 원하는 기능을 다할 수 없다. 예컨대 은을 비중이나 원자량 같은 어떤 물리학적 특성으로써 명시적으로 정의하는 경우, 우리는 단지 감각적 지각과 그에 대한 기억에만 의존해 어떤 금속이 은인가의 여부를 판정할 때에 비해 매우 명료한 은의 개념을 얻을 수 있는 것으로 보인다. 하지만 그 정의항에서 제시하고 있는 특징들을 파악하기 위해서라면 궁극에 있어 결국 감각적 지각에 의존할 수밖에 없다(Schlick 1925/85, p. 27). “[명시적 정의에서] 우리는 곧 명백히 더 이상 정의할 수 없는 어떤 특징들에 이르게 된다. 그러한 궁극적 특징을 지시하는 낱말의 의미는 직관, 즉 직접적인 경험을 통해서만 보일 수 있을 뿐이다”(p. 29). 술릭이 힐베르트의 암묵적 정의의 방법이 지닌 중요성을 인식하고 그것을 자신의 인식론으로 끌어들이는 지점은 바로 이 대목에서이다. 그 방법에 따르면, 우리는 어떤 구체적인 감각적 특징을 지시하지 않고서라도 어떤 개념들을 정의할 수 있기 때문이다. 예컨대 그러한 방법으로 정의되는 ‘점’, ‘직선’, ‘... 사이’와 같은 개념들은 그와 관련된 어떤 시각적 이미지를 전해 주는 대신, 단지 그러한 개념을 구성하기 위해 우리 스스로가 제시한 추상적 관계만을 보여 줄 따름이다. “그러한 개념들은 실재하는 어떠한 것도 지시하지 않으며, [하나의 공리 체계 내에서] 서로를 지시할 뿐이다. [...] 따라서 엄밀한 연역적 과학을 구성하는 일은 기호를 가지고 게임을 하는 정도의 의의만을 지닐 뿐이다”(p. 37). 그러므로 술릭은 힐베르트의 방법이야말로 “인식론에서 지극히 중요한 의의를 지닌 하나의 통로”(p. 33)라고 선언한다.

하지만 술릭이 상대성 이론과 같은 과학의 영향하에 자신의 인식론을 전개한다는 사실 자체가 힐베르트의 암묵적 정의 방식을 끌어들이면서 동시에 다른 면 새로운 문제를 야기한다. 곧 그의 인식론이 단순히 순수히 형식적인 기하학이나 수학에 머물지 않고 경험 과학의 영역으로 확장되는

한, 과연 암묵적으로 정의된 용어가 어떻게 일의적(一義的)인 경험적 의미를 지닐 수 있는가 하는 문제이다. 술릭과, 이후의 라이헨바하는 이러한 문제에 대해 나름의 해법을 시도하고는 있으나,<sup>8)</sup> 그 자체 인식론적으로 중요함에도 불구하고, 그를 통해 힐베르트식의 공리 체계가 어떤 문제를 안고, 그래서 어떻게 개발되어야 하는가라는 탐구로 이어지지 못하고 있다. 술릭이나 라이헨바하 대신, 이러한 문제를 본격적으로 거론한 이가 카르납이다.

### 3. 카르납에 있어 ‘비본래적 개념’

술릭의 문제 제기로 볼 때, 힐베르트식의 암묵적 정의에서 원초적 용어의 의미를 분명히 하는 일이 중요해지는 까닭은 다음과 같다. 단순히 기호

8) 술릭은 지금의 문제에 관해 일단은 ‘일치의 방법’(method of coincidences)으로 답하고 있다. 요컨대 경험적 대상에 대한 우리의 여러 감각적 장(場)들에서 공간 · 시간적으로 서로 일치하는 관계들을(예컨대 내가 연필을 쥐고 글을 쓸 때, 나의 시각적인 장에서의 연필의 끝점과 내 손가락으로 느껴지는 감촉의 장에서의 연필의 끝점이 서로 일치하는 것이다) 암묵적인 정의의 체계 속에 끼워 넣을 수 있다는 것이다(Schlick 1925/85, §31). 라이헨바하는 여기서 한 걸음 더 나아가, 이 과정에서 사실상 문제의 경험적 대상은 독립적으로 주어지기보다 오히려 암묵적 정의를 제공하는 체계에 의해 정의될 수밖에 없다는 점을 들어, 특별한 물리적 원리의 역할을 강조하였다. ‘좌표의 원리(또는 좌표의 공리)’(principle or axiom of coördination)라 부르는 이 원리는 뉴턴의 역학에서 뉴턴의 운동 법칙과 같이 그 자체 경험적 대상에 대한 개념을 구성하는(constitutive) 역할을 하는 것이다(Reichenbach 1920/65, Ch. VII). 술릭과 라이헨바하는 이후 서로의 교통을 통해 그러한 구성적 원리는 포앵카레(H. Poincaré)의 의미로 하나의 규약(convention)으로 보아야 한다는 데 의견의 일치를 보고 있다(Schlick 1925/85, §11). 하지만 골드하브(Goldfarb 1996, p. 214)는 Coffa 1991, p. 175ff.에 따라 예컨대 술릭의 다음과 같은 구절(Schlick 1925/85, p. 38)을 상기시키며 술릭이 지금과 같은 문제에 대한 해결의 필요성은 인식하고 있었으나 그 구체적 과정에 대해서는 명료히 해명하지 못했다고 비판하고 있다: “어떤 개념적 관계로부터 직관적인 사례로 넘어가는 순간, 우리는 더 이상 완벽한 엄밀성을 확신할 수 없게 된다”.

들의 체계로서 형식적인 측면에서 보자면, 공리 체계는 그 일관성(consistency)이 중요할지 모른다. 사실상 잘 알려진 대로 힐베르트 자신이나 그 이후의 형식주의자들은 이 점에서 일관성의 문제에 몰두한 바 있다. 하지만 아무리 형식적으로 일관적인 많은 공리 체계를 구성한다 할지라도, 그것이 경험 세계에 적용되기 위해서는 해당 공리 체계의 원초적 용어들이 정확히 문제의 경험 대상에 대응될 수 있을 정도로 그 용어의 의미가 분명하게 규정되지 않으면 안 된다. 사실상, 앞서 제1절에서 소개한 대로, 프레게가 직사각형의 예를 들어 힐베르트의 암묵적 정의 방식에 대해 불만을 토로했을 때, 그것은 이미 이러한 문제의 소지를 보여 준 셈이다. 물론 오늘날의 관점에서 보자면, 프레게가 주장하듯 기하학의 공리들이 공간에 관한 우리의 어떤 직관을 나타낸 것이라고 보기는 쉽지 않아 보인다. 비유클리드 기하학의 성립이 그것을 잘 보여 주고 있기 때문이다. 이 점에서라면, 결과적이기는 하나, 오히려 힐베르트가 기하학의 공리를 그와 같은 직관에서 해방시켜 자유롭게 구성 가능한 것으로 열어 놓은 일은 순수 수학적인 측면에서는 크게 혁신적인 일일 수밖에 없다. 하지만 그것이 곧 기하학의 전부일 수는 없다. 기하학이 공간론의 일부이고, 공간이라는 것이 단순히 형식적인 기호 체계로만 대치될 수 없는 것인 한,<sup>9)</sup> 공간에 관한 공리 체계로서의 기하학을 문제삼는 데에는 자연히 경험적 대상과의 연계를 생각하지 않을 수 없고, 이를 위해서는 필히 그 체계상의 원초적 용어의 의미 문제가 대두될 수밖에 없기 때문이다. 카르납은 정확히 이 지점에서 그의 초기에 힐베르트식의 암묵적 정의 방식에 문제를 제기하고 있다.

카르납 역시 술릭과 마찬가지로 고등 과학에서의 객관적 인식의 기초로서 명료한 개념 구성의 중요성을 잘 알고 있었다. 그러므로 이미 널리 관심을 끌고 있던 힐베르트식의 암묵적 정의 방식이 그와 같은 개념의 구성에 제대로 기여할 수 있는가에 관심을 갖고 있었고, 이러한 그의 관심이 본격적으로 드러난 것이 1927년의 논문 “본래적 개념과 비본래적 개념”(Eigentliche und Uneigentliche Begriffe)이다.<sup>10)</sup>

9) 넓게 보아 기하학이 수학의 한 분야이면서도 다른 수학의 분야와 구별되는 중요한 점 하나도 바로 이와 관련되어 있다.

여기서 그는 일차적으로 암묵적 정의의 방식이 배중률을 거스를 수 있다는 점에서 그 자체 곧 경험적 대상에 적용되기는 어려운 것으로 본다. 이 점은, 전통적인 명시적 정의의 경우와 비교해, 뚜렷이 대비된다. 예컨대 생물학에서 ‘말’(馬)이라는 개념을 생각해 보자. 카르납의 경우, 칸트의 전통에 따라, 어느 한 개념은 가능한 어떤 판단에서 그 술어에 해당한다. 그러므로 말이라는 개념은 그에 대한 하나의 판단, 예컨대 ‘...은 말이다’라는 판단에서 그 술어에 대응된다. 술어 논리적 용어로 말하자면, 하나의 명제 함수에 해당되는 셈이다. 이 경우 우리는, 적어도 원리상, 어느 특정한 대상이 말이라는 개념(또는 명제 함수)에 해당되는지 아닌지를 분명히 가릴 수 있는 것으로 간주한다. 즉 그 어느 쪽도 아닌 제3의 경우는 배제하는 것이다. 지금의 경우 이러한 일이 가능한 까닭은, 말이라는 개념이 적어도 직접 경험 가능한 것을 지시하는 다른 개념들(예컨대 네 다리가 있고 발굽이 있다는 등의)로부터 도출 가능하기 때문이며, 이 때의 도출이야말로 새로운 개념을 나타내는 용어를 그 이전의 또 다른 개념들을 나타내는 표현들과 동의어로 보는 명시적 정의에 해당된다. 요컨대 명시적 정의는 우리가 배중률에 따라 해당 정의에 부합되는 경험적 지시체를 명료하게 대응시킬 수 있는 경험적 실마리를 제공하는 셈이다(pp. 355-6, 357; Mormann 2007, p. 60 참조).

하지만 어느 개념이 암묵적 정의로 주어진 경우에는 이와 같이 말할 수 없다. 예컨대, ‘수’와 ‘후자’의 개념이 등장하는, 잘 알려진 페아노의 공리 체계를 생각해 보자. 여기서의 개념들은 좀더 근본적인 다른 개념들로부터 명시적으로 정의되는 대신, 다섯 개의 공리들이 함께 ‘수’라는 집합과, ‘후자’라 부르는 관계를 규정해 주는 방식으로 암묵적으로 정의되고 있다. 그러나 이러한 방식으로 정의가 이루어진다면, 단지 하나의 수 집합만이 주어지는 대신, 수많은 해석이 가능하다. 우선 문제의 공리 체계에 대해 실제적인 경험적 대상에 관한 실현 사례들(Realisationen)로 이루어지는 해석을 보기로 하자. 이 경우, 페아노의 공리를 만족시키는 실현 사례들은 (무한한

10) 이 논문의 359쪽 각주에서 카르납은 Schlick 1925/85의 독일어 초판을 지적하고 있다. 이하 카르납의 본 논문을 지적하는 경우에는 면수만 표기하기로 한다.

것으로 가정된) 물리적 공간상의 점들의 계열, 시각(時刻)들의 계열, 구슬들의 계열 등등 무수히 많을 수 있다. 그러므로 사실상 페아노의 공리들이 제시하는 수 계열에 대한 암묵적 정의는 어느 특정한 수 계열을 규정한다기보다 그 공리들이 제공하는 형식적 특징, 곧 하나의 구조 속에 부합되는 무한한 경우들을 규정하는 것으로 볼 수 있다(pp. 361-2).

그러나 이와 관련해 카르납의 주관심은 실현 사례들에 놓여 있기보다 좀더 나아가 (논리학이나 수학상의) 형식적 개념이 지시하는 형식적 모델에 의한 해석에 놓여 있었다. 사실 카르납은 일관적인 어느 공리 체계가 실로 앞서와 같은 실현 사례를 실제로 갖는지, 아니면 하나 또는 그 이상의 실현 사례를 갖는지 등의 문제는 구체적으로 경험에 의해 결정될 문제로, (지금과 같은 논의에서는) 더 이상 관심을 둘 필요는 없다고 본다(p. 362). 하지만 어느 경우든 일관적 공리 체계 자체는 무한히 많은 형식적 모델을 취할 수 있고, 동일한 공리 체계라 할지라도 그에 대해 서로 다른 형식의 형식적 모델이 존재할 수 있다는 점은 지금의 우리에게 매우 심각할 수밖에 없다. 왜냐하면, 만일 형식적 모델에 있어 상황이 이러하다면, 그와 같은 형식을 실현하는 경험 모델에 경우에도 마찬가지로 상황이 전개될 수 있고, 이것은 원리적으로 좀더 근본적인 문제를 야기하기 때문이다.

이제, 카르납에 따라(p. 363ff.), ‘...의 아버지’라는 관계  $R$ 에 관한 다음과 같은 매우 간략한 공리 체계를 가정해 보기로 하자.

- AS I. 1.  $R$ 이 적용되는 대상들의 집합(Feld)은 세 개의 원소로 이루어진다.  
 2.  $R$ 이나, (그러한  $R$ 이 거듭 적용되는)  $R$ 의 연쇄는 반반사적(irreflexiv)이다.  
 3.  $R$ 은 반이행적(intransitiv)이다.

그런데 이와 같은 공리 체계에 대한 실현 사례, 그리하여 또한 그에 대응하는 형식적 모델은 적어도 다음과 같은 서로 다른 두 가지 형식을 취할 수 있다: 1. 아들과 손자를 둔 남자, 2. 두 아이를 둔 남자. 그러므로 위의 공리 체계 AS I만으로는 결코  $R$ 에 대한 모델로 정확히 어느 것을 대응시

킬 수 있을지 알 수 없다. 형식적으로 보자면, 첫 번째 모델에서  $R$ 은 일대일 대응 관계인 반면, 두 번째 모델에서는 그렇지 않다. 전자의 경우 남자-아들-손자의 라인에서 아들과 아버지는 차례로 일대일로 대응하는 반면, 후자의 경우 남자와 두 아이의 라인에서 아이들과 아버지는 다대일로 대응하기 때문이다. 따라서 우리는  $R$ 에 대해 그것이 일대일 대응이라고 말할 수도 없고, 그렇지 않다고 말할 수도 없으며, 이로써 적어도  $R$ 과 같은 개념에 대해서는 배중률이 적용되지 않는다고 말할 수밖에 없다. 이렇게 된다면, 그러한  $R$ 이 의미하는 바는 정확히 무엇인가?

하지만 이제 위와 같은 공리 체계에 다시 하나의 공리를 추가해 다음과 같은 새로운 공리 체계를 구성한다고 해 보자. 이 경우라면, 위의 두 모델 가운데 오직 두 번째 모델만이 주어질 수 있을 뿐이다.

AS IIa. 1, 2, 3은 앞서와 같고,

4.  $R$ 의 관계에서 오직 하나의 전항(前項, Vorderglied)<sup>11)</sup>만이 존재할 뿐이다.

그러므로 만일 공리 체계 AS IIa에서라면, 그에 대한 해석은 그것이 실현 사례이든 형식적 모델이든 관계없이 어느 것이든 서로 일대일 대응하여, 구조적으로 '동형'(isomorph)이라 할 수 있다. 이러한 점은 지금의 우리 논의에서 매우 중요한데, 만일 AS IIa와 같은 공리 체계에서라면, 그 체계에 대한 해석이 무한히 가능하다 할지라도, 결국 그 형식에 관해서는 오직 하나만을 규정할 수 있기 때문이다. 카르납은 이와 같은 종류의 공리 체계에 대해 그것을 '단형적'(單型的, monomorph)이라 불렀다(p. 364).

이 점에서 본다면, 앞서 제1절에서 프레게가 예로 들어 보인 대로, 공리들에 의해 정의된 직사각형 개념이 어떤 공리를 선택하느냐에 따라 그

11) 즉  $R$ 의 관계를 이루는 항 중 첫 번째 항이 하나인 경우를 말한다. 앞서 주어진 예에서라면, 남자와 두 아이 각각의 관계에서 아이 하나하나와 관계를 이루는 남자는 그 관계에서 단 하나의 동일한 항에 해당하는 셈이다. 반면 남자와 아들, 그리고 손자가 관계  $R$ 을 이루는 경우에는, 남자와 아들이 각기 서로 다른 두 전항에 해당한다.

지시하는 바가 부동(浮動)한다고 불만을 토론했던 점 역시 명료히 재해석할 수 있게 된다. 어느 대상에 대해 그것이 궁극적으로 직사각형인지의 여부는, 공리 2만이 주어졌을 때와 공리 1이 함께 주어졌을 때 달라질 수 있기 때문이다. 이러한 상황에 대해 프레게는 그러한 공리들이 결국 우리의 직관에 근거하지 않았기 때문이라 보았지만, 카르납의 입장에서 보면 그것은 단순히 우리 직관만의 문제는 아닌 셈이다.

이러한 점을 들어 카르납은, 명시적 정의에 의해 주어진 개념과 비교해, 암묵적 정의에 의해 주어지는 개념을 ‘비본래적 개념’이라 칭하여(이에 반해 명시적 정의에 의해 도입된 개념은 ‘본래적 개념’이라 불렀다), 그것이 과학에서 문제 없이 곧바로 사용될 수 있는 개념은 아니라고 보았다. 이러한 견지에서 보자면, 앞서 예로 든 페아노의 공리 체계에서처럼 단 하나의 비본래적 개념만에 한하지 않고, 여러 개의 비본래적 개념이 동시에 등장하는 힐베르트의 기하 공리 체계는 한층 더 그 문제가 심각하다 하지 않을 수 없다. 페아노의 공리 체계에서 주어지는 수 개념의 경우, 그 개념이 어느 대상 하나하나에 대응하는지의 여부를 말할 수는 없으나, 그럼에도 불구하고 어떤 대상 전체가 이루는 계열에 대해서는 그와 같이 말할 수 있다. 그러므로 그 계열이 문제의 수 개념의 한 실현 사례인지 형식적 모델인지의 여부는, 적어도 원리상, 결정 가능하다. 하지만 힐베르트의 공리 체계에서는 적어도 점, 선, 면에 관한 세 가지 근본 집합과, ‘...위에 놓여 있음’의 관계, ‘... 사이’의 관계, 합동의 관계 등 세 가지 관계에 관한 근본 개념이 함께 공리들에 의해 암묵적으로 정의되고 있는 것이다(Hilbert 1899a/2007, Ch. I). 그러므로 여기서는 예컨대 ‘점’과 관련해 어느 대상들의 전체 집합에 대해 과연 그것이 힐베르트가 말하는 점들의 집합이라고 말할 수 있는지도 결정 불가능하다. 왜냐하면 이러한 문제에 대해서는 힐베르트의 공리 체계 내에서 다른 나머지 다섯 개의 근본 개념들에 대한 해석이 동시에 주어지는 경우에만 답할 수 있기 때문이다(p. 369). 물론 이와 같은 사정은 힐베르트 자신도 이미 잘 알고 있었던 것으로 보인다. 프레게가 앞서 소개한 공개적 논문을 통해 자신을 비판하기 훨씬 이전에 그에게 보낸 서신 가운데 제시한 다음과 같은 구절은 흔히 힐베르트의 형식

주의를 예시하는 구절로 유명하나, 지금의 맥락에서는 바로 위와 같은 점을 잘 보여 주는 것으로도 볼 수 있기 때문이다.

[...] 모든 이론이[즉 여기서는 모든 형식적 공리 체계가] 단지 서로 필연적인 연관성을 지닌 개념들의 뼈대(scaffolding)일 뿐이며, 그 기본 요소들은 우리가 원하는 대로 무엇으로 생각하든 관계없다는 점은 분명하다. 예컨대 점 대신에, 사랑, 법률, 굴뚝 청소부, ... 그 어느 것의 체계든 [문제의] 모든 공리들을 만족시키는 것이면 아무런 문제가 없다. 그러므로 이 경우라면 피타고라스의 정리조차 그러한 것들에 적용 가능한 것이다. 어느 이론이든 언제나 무한히 많은 기본 요소들의 체계에 적용 가능하다. (Hilbert 1899b/1980, p. 42)

그러므로 이러한 사정에 근거해, 카르납은 비본래적 개념과 본래적 개념 사이의 핵심적인 차이는, 그것을 나타내는 기호의 기능으로 볼 때, 후자는 하나의 상황에 해당하는 반면, 전자는 하나의 변항에 해당한다는 점에 놓여 있다고 지적한다. 비본래적 개념을 나타내는 변항은 그 자체로 일정한 의미를 가질 수 없을뿐더러, 그러한 변항이 들어간 일련의 기호들도 하나의 명제를 이루지 못하고, 단지 명제 함수만을 이룰 뿐이기 때문이다(pp. 370-1).

물론 이와 같은 변항이라 할지라도 힐베르트의 공리 체계 내에서 하나의 상황으로 처리하지 못하는 것은 아니다. 예컨대 그 체계 내의 세 가지 근본 집합들을  $p$ ,  $g$ ,  $e$ , 그리고 세 가지 근본 관계들을  $I$ ,  $Z$ ,  $K$ 라 하면, 다음과 같은 6항의 관계를 갖는 새로운 관계  $H$ 를 (명시적으로) 정의함으로써 (아래에서 기호 ‘ $\wedge$ ’는 해당 공리들의 논리적 연언이 적용되는 각 대상들의 집합을 뜻한다),

$$H =_{df} p \wedge g \wedge e \wedge I \wedge Z \wedge K [\dots (\text{해당 공리들의 논리적 연언}) \dots]$$

그것을 상황으로 바꿀 수 있기 때문이다(p. 369). 이렇게 된다면, 각기 6개의 변항에 해당하던 6개의 개념들이 이제 6개의 상황을 관계항으로 하는 하나의 6항 개념으로 전환되고(Gabriel 2007, p. 74 참조), 이것이야말로 사

실상 앞서 제1절에서 소개한 힐베르트의 기하 이론에 대한 치하라의 해명에 해당되는 셈이다.

하지만 이렇게 된다면, 이로써 얻게 된 새로운 6항의 개념은, 원래 주어진 힐베르트의 공리 체계가 정의하고자 하는 개념이 아니라, 그보다 한 단계 높은 2계(second-order) 이론상의 개념이 되어, 원래의 공리 체계로써 암묵적으로 정의했던 개념에 대해서는 그것을 적용할 수 없게 된다. 카르납 자신, 이와 관련해, 앞서 소개했던 페아노의 공리 체계로써 이를 예시하고 있는데, 이를 위해 앞서 소개했던 구슬의 예로 되돌아가 보기로 하자. 이 경우, 어느 특정한 구슬 하나에 대해 그것이 페아노의 공리를 만족하는 하나의 수에 대응하는가를 물을 수는 없다. 하지만 그러한 일련의 구슬들의 계열 전체에 관해 그것이 해당 공리 체계를 만족시키는가를 물을 수 있다. 이 때 구슬들의 계열뿐만 아니라, 다른 모든 계열에서도, 페아노의 공리 체계에서 제시하고 있는 형식적 특성을 지니는 계열 일반을 가리켜 관계 이론에서는 그를 '수열'(Progression)이라 부르고 있다. 그러므로 우리는 문제의 구슬들의 계열이 과연 그러한 수열의 한 사례가 되는가를 정당하게 물을 수 있고, 이 점에서 페아노의 공리 체계는 (그의) 수 개념에 대해서는 암묵적 정의만을 제공할 뿐이나, 수열 개념에 관해서는 명시적 정의를 제공하는 것으로 볼 수 있다.<sup>12)</sup> 하지만 이렇게 명시적으로 정의된 본래적 개념 자체는 원래의 페아노 공리 내에는 나타나지 않으며, 따라서 그러한 공리로써 구성된 이론 내의 정리들에도 나타나지 않는다. 곧 그러한 공리들으로써 정의된 어떤 자리에서 문제의 개념은 적용 불가능한 것이다. '수열'이라는 개념은, 그 이전의, '수'라는 개념이 나타나는 단계보다 한 단계 더 높은 개념이기 때문이다. 힐베르트의 공리 체계에 대한 6항 개념의 경우라면, 그 6개의 근본 개념들의 체계가 힐베르트의 원래 공리 체계보다 한 단계 더 높은 개념의 한 사례가 될 수 있는가를 묻는다는 것일 뿐, 사정은 페아노의 공리 체계에서와 마찬가지로이다(pp. 367-70).<sup>13)</sup>

12) 이 점에서 어워드와 캐러스는 카르납의 관점이 형식적인 면에서 프레게의 이론 바 '맥락의 원리'(context principle: '단말들의 의미는 문장들의 맥락 내에서만 찾을 수 있다')를 연상시킨다고 말한다(Awodey & Carus 2001, p. 150).

## 4. 일의성의 문제

암묵적 정의에 관해 만일 앞서와 같은 카르납의 관점에 서게 된다면, 이로써 과연 그러한 정의에 의해 주어지는 비본래적 개념과 경험적 대상과의 대응 관계는 포기해야 하는 것인가. 이에 관해 카르납은 우선 다음과 같이 답하고 있다.

각 실재적 [즉 경험적] 개념은 [...] 실재와 직접적인 연관성을 갖고 있다. 반면, 비본래적 개념들은 말하자면 공중에서 떠돌 뿐이다. 이것들은 공리 체계에 의해 도입되는데, 실재와는 직접 연결되지 않는다. 그러한 체계의 공리들이나 그로부터 연역되는 정리들은 적절하게 하나의 이론을 형성하는 것이 아니라(왜냐하면 그것들은 특정한 어떤 것도 다루고 있지 않기 때문이다), 단지 이론의 도식(Theorie-Schema), 즉 가능한 어떤 이론들을 위한 빈 형식(Leerform)일 뿐이다. (p. 372)

그러나 그는 곧 이어 “만일 우리가 그 공리 체계 내에서 문제의 비본래적 개념에 주어진 <형식적 특성>(formale Beschaffenheit)을 지닌”(ibid., 강조 필자) 어떤 경험적 개념을 발견할 수만 있다면, 이로써 곧 “그 체계는 하나의 실현 사례를 발견하게 된 것”이라 강조하고 있다. “하나의 변항 [역할을 하는] 비본래적 개념의 자리에 그에 대응하는 경험적 개념이 대입되는” 셈이다. 예컨대 물리적 공간상의 도형으로서 점과 같은 것이 ‘점’에 관한 기하학의 공리들이 보여 주는 대로의 형식적 특성을 갖고 있음을 경험적으로 확인할 수만 있다면,<sup>13)</sup> (앞 절에서 언급한 대로의) 근본 집합  $p$ 를 이제 문제의 물리적 점들의 집합으로 대신할 수 있다는 것이다(pp. 372-3). 그리하여 그는 다음과 같이 결론짓고 있다.

13) 이와 같은 비판은 이미 프레게에게서도 볼 수 있다(Frege 1900/80, p. 46; Frege 1903/60, p. 11ff. 참조).

14) 이후 카르납은 이와 같은 일을 이른바 ‘순수 구조적인 한정 기술’(purely structural definite description)의 방식으로 처리하고 있다(Carnap 1928a/67, §14 참조).

[경험적] 개념과 [...] 공리들의 이와 같은 접촉을 통해, 해당 공리 체계에 의존한 이론 도식 전체와도 단 한번에 어떤 연관성이 형성된다. 이 연관점을 통해 경험적 실재의 피가 흘러들고, 지금까지 비어 있던 도식의 가장 세세한 모세 혈관으로까지 그 피가 흘러가, 문제의 도식은 내용이 채워진 하나의 이론으로 변모하는 것이다. (p. 373)

따라서 암묵적으로 정의된 비본래적 개념들을 설정하고 그에 대해 타당한 정리들을 연역해 내는 일은 결국 위와 같은 이론 도식을 예비해 두는 일이며, 이러한 도식의 유용성은 추후 그것을 다양하게 응용할 수 있다는 데 놓여 있다는 것이다. 즉 동일한 하나의 도식을 이후 여러 다른 실제적 체계에 적용할 수 있는 가능성을 열어 두는 일이다(ibid.).

이것은 힐베르트식의 공리 체계를 바라보는 카르납의 중요한 결론 중 하나이나, 사실 프레게의 논박에 대해 자신의 입장을 해명하는 과정에서 힐베르트가 보여 주는 다음과 같은 대목은 그 역시 이미 이러한 점을 매우 의식적으로 염두에 두고 있었지 않았나 하는 의구심을 불러 일으킨다.

[...] 접이라는 개념에 대한 정의는 해당 공리 체계의 구조가 완결되기 전까지는 완결되지 않는다. 왜냐하면 모든 공리 하나하나가 그 정의에 나름의 기여를 하고, 따라서 새로이 추가되는 공리들이 그 개념에 변화를 줄 수 있기 때문이다. 유클리드, 비유클리드, 아르키메데스, 비아르키메데스 기하학상의 점은 각각의 경우에 서로 다른 무엇이다. 하나의 개념이 일단 완전하고도 명료하게 고정된 이후라면, 거기에 하나의 공리를 덧붙인다는 것은 부당하며 비논리적인 일이다—이것이야말로 물리학자들이 매우 흔히 범하는 실수이다. (Hilbert 1899b/1980, p. 42)<sup>15)</sup>

그러므로 만일 이상이 암묵적 정의에 관한 카르납의 전부라면, 힐베르트식의 공리 체계에 대한 카르납의 분석에 과연 새로운 것이 무엇인가라는

15) 프레게의 줄기찬 비판에도 불구하고 힐베르트가 자신의 방식에 대한 신념을 잃지 않는 주요한 이유는 바로 그 방식대로의 공리 체계가 지닌 이와 같은 효용이나 의의에 대한 신념 때문으로 보인다. 힐베르트의 지지자인 콜셀트 역시 바로 이러한 면을 중심으로 그를 해명하고 있으며(Korselt 1903/1971, 특히 p. 42 참조), Hilbert 1918에서는 이러한 방식에 의해 여러 분야의 학문이 어떻게 통합될 수 있는가를 간략히 보여 주고 있다.

의문이 제기될 수 있다. 게다가 만일 위의 결론이 카르납의 최종 결론이라면, 골드화브의 비판대로(Goldfarb 1996, pp. 216-9), 카르납의 철학에서 일면 경험 과학을 위한 암묵적 정의의 자리란 궁극적으로 존재하지 않는 것으로 볼 수도 있다. 위의 카르납으로부터의 인용으로 볼 때, 암묵적 정의는 그 미래의 효용이 무엇이든 결국 경험적 개념에 의해 명시적 정의로 전환될 그 무엇으로서만 의의를 지니기 때문이다. 골드화브는, 카르납이 암묵적 정의에 의해 주어지는 개념과는 달리 명시적 정의에 의해 주어지는 개념을 '본래적' 개념이라 부르고, 이후의 『세계의 논리적 구성』(Carnap 1928a/67)에서 명시적 정의의 관계만을 갖고 과학적 개념의 구성 관계를 체계화하려 시도한 점 역시 이를 잘 반영하는 것이라 지적하고 있다.

그러나 이는 단지 위의 카르납의 견해에 대한 강조의 차이일 뿐일 수 있다. 왜냐하면 궁극적으로 암묵적 정의가 명시적 정의로 대체되어야 한다 할지라도, 오히려 위의 인용은 그러한 대체 이전의 암묵적 정의의 효용을 잘 보여 준 것이라 볼 수도 있기 때문이다. 힐베르트식의 공리 체계를 활용하는 경우, 카르납이 말하듯 그것이 궁극적으로 명시적 정의로 대체된다 할지라도, 그러한 대체가 잘 이루어지기 위해서는 그 이전에 그것을 가능케 하는 제대로 된 암묵적 정의의 구성이 중요하기 때문이다. 이와 관련해, 좀더 최근에 어워드와 캐러스(Awodey & Carus 2001) 또는 렉(Reck 2007)을 통해 잘 드러나듯, 카르납이 위에서와 같이 그치지 않고 계속 암묵적 정의에 관해 지속적인 문제 의식을 갖고 있었다는 사실은 그의 철학에서 암묵적 정의가 그저 하나의 과정에 지나지 않는 것도 아니며 위의 결론이 그의 결론의 전부도 아님을 잘 보여 준다고 생각한다.

카르납이 생각하는 대로, 사실, 비본래적 개념의 자리에 경험적 개념이 대입 가능하기 위해서는 후자의 형식적 특성에 주목해 그것이 과연 전자와 일치하는가를 판정할 수 있어야만 한다. 그리고 여기서는 다시 두 가지 측면에서의 검토가 필요하다.<sup>16)</sup> 첫째, 해당 공리 체계를 연역적으로 전개할 경우, 암묵적으로 정의된 문제의 개념을 포함한 명제  $p$  모두에서  $p$

16) Awodey & Carus 2001, p. 149 참조 그들은 두 측면에서의 문제 각각을 공리 체계 내부에서의 문제와 외부로부터의 문제로 보고 있다.

아니면  $\sim p$ 가 성립해야 할 것이다. 만일 이와 같지 않다면, 우선 해당 공리 체계 내에서 문제의 개념을 확정지을 수 없고, 그리하여 일정한 형식적 특성을 지닌 경험적 개념과의 일치 여부의 문제로조차 들어갈 수 없기 때문이다. 그런데 앞의 제3절에서 언급한 대로, 특별한 조건이 부여되지 않는 한, 암묵적으로 정의된 개념은 그 자체 배중률을 따르지 않고, 명제  $p$ 에 대해서도 위와 같이 말할 수 없다. 이것은 이른바 ‘결정 가능성’(Entscheidungsdefinitheit)의 문제로, 앞 절의 예에서 보듯, 카르납은 적어도 1927년 당시부터 이러한 문제를 명료히 인식하고 있었다. 그리하여 그가 공리 체계의 단형성을 언급했을 때, 그는 이미 해당 체계가 특별히 단형적이라면, 즉 오직 하나의 형식만을 결정지어 줄 수 있다면, 그 체계는 결정 가능한 체계임을 선언하고 있는 셈이다. 사실상 앞의 제3절에서의 예시 후 그는 곧 이어 단형적인 체계는 결정 가능하고 그 역도 성립함을 간략하게 보여 주고 있다(pp. 364-5).

따라서 만일 단형성의 조건이 충족된다면, 위의 첫 번째 검토 사항은 해소된다. 하지만 이러한 문제의 해소 여부와는 별도로 먼저 고려해야 할 두 번째 검토 사항이 존재한다. 즉 해당 공리 체계로써 암묵적으로 정의한 개념에 해당하는 경험적 대상을 그렇지 않은 대상과 분명하게 구별할 수 있느냐 하는 문제이다. 이른바 ‘일의성’(Eindeutigkeit)의 문제라 부르는 이 문제는, 해당 공리 체계가 단형적이라 할지라도, 과연 그로써 암묵적으로 정의된 개념이 일정한 형식적 특성을 지닌 경험적 개념(그리하여 또한 그에 대응하는 형식적 모델)과 꼭 하나로만 대응될 수 있는가를 문제삼고 있다. 이 경우 만일 해당 공리 체계로부터 연역되지 않는 어떤 명제들을 그 공리 체계에 부가할 경우, 그 명제들은 서로 모순될 가능성이 있으며, 이로써 해당 체계로써 정의한 개념이 문제의 경험적 개념과 하나로 대응된다고 보장할 수는 없다.

카르납이 이와 같은 두 번째 문제에 대해 본격적으로 그 해결의 시도를 펼친 것은 1927년 논문의 발표 이후로,<sup>17)</sup> 그 성과는 1928~30년 사이에 제

17) 하지만 하워드는 아인슈타인의 일반 상대성 이론, 특히 ‘구멍 논증’(hole argument)과 관련하여 카르납은 그의 1927년 논문에서뿐 아니라 일찍이

시된 발표문이나 간략한 요약의 형태로 나타났으나, 그 자세한 내용은 오랫동안 유고의 형태로만 남아 있었다. 단지 좀더 최근에는 “일반 공리론 탐구”(Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik)라는 제목의 단행본으로 편집되어 널리 공개되었을 뿐이다(Carnap 1928b/2000). 지금의 우리 문제와 관련해 카르납의 이러한 문헌에 담겨 있는 핵심은 이른바 ‘분기 가능성의 정리’(Gabelbarkeitssatz)이다. 이 정리의 내용은 다음과 같다(ibid., pp. 133, 136).

다형적인 공리 체계는 모두 분기 가능하고, 이 역도 성립한다.

여기서 ‘다형적’(多型的, polymorph)이라는 말은 단형적이지 않음을 뜻하고, ‘분기 가능하다’(gabelbar, forkable)는 것은 어떤 공리 체계에 대해서 양립 불가능한 새로운 명제들을 부가할 수 있음을 뜻한다. 후자의 경우, 예컨대 평행선의 공리를 뺀 유클리드 기하 체계에 대해 문제의 평행선 공리를 부가하거나 그와 양립 불가능한 로바체프스키의 공리를 부가하든 해당 공리 체계의 일관성에 아무런 문제가 발생하지 않는다면, 바로 그 지점에서 문제의 체계는 분기 가능하다고 보는 것이다(Awodey & Carus 2001, p. 147). 그러므로 위의 정리는 ‘단형적인 공리 체계는 분기 불가능하고, 이 역도 성립함’을 의미한다. 이 정리는 이제 힐베르트의 암묵적 정의 방식에 대해 카르납의 철학이 제대로 기여할 수 있는가라는 문제에 관해 매우 중요한 지점이므로, 좀더 엄밀히 살펴볼 필요가 있다.

우선, 앞서 제3절에서 언급한 대로, 하나의 공리 체계에서 정의된 원초 용어를 하나의 변항으로 본다고 해 보자. 그렇다면 해당 체계의 변항들의 쌍을 하나의 관계  $R$ 로 대신할 수 있고, 이로써 그 체계 전체를 하나의 명제 함수  $f(R) = f_1(R) \& f_2(R) \& \dots \& f_m(R)$ 로 나타낼 수 있다(따라서 여기서  $f_1, \dots, f_m$ 은 해당 체계의 각 공리에 해당된다).<sup>18)</sup> 이제 만일 어떤 공리

Carnap (1922, 카르납의 학위 논문으로는 1921년)에서도 일의성 문제를 고심하고 있었다고 지적하고 있다(Howard 1996, §4).

18) Carnap 1928b/2000, p. 91에서는 이를  $f$  같은 방식으로 표기하고 있으나, 여기

체계  $f$ 에 있어 명제  $(\exists R)f(R)$ 이 성립하는 경우에 그 체계는 ‘만족되었다’(erfüllt)고 말하고,  $f$ 와 유사하게 규정된 또 다른 명제 함수  $g$ 에 의해  $f$  &  $g$ 와  $f$  &  $\sim g$ 가 동시에 만족될 경우  $f$ 는  $g$ 에서 ‘분기 가능하다’고 말한다. 그러므로 예컨대 바로 위에서의 예인, 평행선의 공리를 뺀 유클리드 기하학 체계는 평행선의 공리에서 분기 가능한 셈이다.

카르납은 물론 분기 가능성의 정리에 대해 나름의 증명을 제시하고 있다(Carnap 1928b/2000, §3.4). 이 대목은 이후 검토가 필요하나, 논의의 진행상 일단 그러한 증명에 따라 문제의 정리가 옳다고 해 보자. 그렇다면 여기서 우리는 그가 공리 체계에 대해 제시한 여러 개념들 사이의 관계에 관해 매우 의미심장한 결론에 이를 수 있다. 왜냐하면 앞서 언급한 대로 결정 가능성이 단형성과 관련 있고, 다시 단형성이 분기 가능성과 관련이 있다면, 그 삼자 사이에 다시 새로운 관계를 추적할 수 있기 때문이다. 사실 카르납은, 어느 공리 체계가 결정 가능하다면, 그것은 분기 불가능하다는 것과 동치라 보고 있다. 왜냐하면 어느 공리 체계  $f$ 에 있어 모든 명제 함수  $g$ 에 대해  $g$  또는  $\sim g$  중 정확히 하나만이  $f$ 의 귀결일 때 그것이 결정 가능하다면, 그러한 체계야말로 분기 불가능하며, 그 역도 성립함을 쉽게 보여 줄 수 있다고 보기 때문이다(ibid., §3.6). 만일 사정이 이러하다면, 우리는 그러한 동치 관계에 의해, 만일 앞서 제시된 분기 가능성의 정리가 성립한다면, 단형적인 어떤 체계는 분기 불가능하며, 그것은 또한 결정 가능하다고 말할 수 있다. 이것은 앞서 그의 1927년 논문에서 간략히 보여 준 바를 새로운 동치 관계로써 다시 입증하려 한 결과로 볼 수도 있다. 하지만 이를 넘어, 만일 문제의 동치 관계가 진정으로 성립한다면, 그것은 어느 공리 체계가 단형적이기만 하다면, 그로써 곧 앞서 제기했던, 경험적 개념과 암묵적으로 정의된 개념 사이의 두 문제가 모두 해결됨을 뜻한다. 그러므로 이는 카르납과 더불어 우리가 안고 있는 문제에 매우 중요한 결론이나, 좀더 현대적인 관점에서 보았을 때, 바로 여기에 다시 심각한 난점이 놓여 있음을 발견하게 된다.

---

서는 Awodey & Carus 2001에 따라 좀더 현대적인 방식으로 표기하기로 한다. 이하 마찬가지로이다.

오늘날 ‘단형적’이라는 말을 베블런(O. Veblen)에 따라 ‘절대적’(categorical)이라는 말로 바꿀 경우,<sup>19)</sup> 사실 어느 공리 체계가 절대적이라 할지라도, 그것이 곧 결정 가능하지 않을 수 있음은 이미 잘 알려져 있다. 달리 말해, 어느 체계가 절대적이라 할지라도 그것은 연역적으로(또는 구문론적으로) 완전하지(deductively/syntactically complete) 못할 수 있는 것이다. 그 전형적인 예가, 괴델이 지적인 대로(Gödel 1930/95; 1931/86), 바로 앞서 카르납이 자신의 견해를 개진하기 위해 제시했던 페아노의 공리 체계 그것이다.<sup>20)</sup> 오늘날 역사적 고찰에 따르면,<sup>21)</sup> 직접 괴델을 통해 카르납 역시 일찍부터 이러한 사실을 깨닫기 시작했으며, 그가 “일반 공리론 탐구”의 출간을 포기해, 결국 그의 사후 오랜 후에야 타인에 의해 그것이 출간된 까닭 역시 근본적으로 이에 놓여 있는 것으로 드러나고 있다.

## 5. 암묵적 정의와 의미론적 완전성

일의성 문제를 둘러싼 카르납의 이론 전개가 만일 앞서와 같은 결론만으로 끝난다면, 공간론에서 힐베르트식의 암묵적 정의에 관한 카르납의 기여는, 그러한 정의 방식이란 궁극적으로 경험 과학의 영역으로는 확대될 수 없다는 부정적인 결론의 확인만으로 그치는 것으로 볼 수 있을지 모른다. 하지만 다른 면으로 보자면, 나는 여기서 동시에 카르납의 시도에 숨어 있는 또 다른 긍정적인 면을 확인할 수 있다고 생각한다.

무엇보다 카르납이 힐베르트식의 형식적 공리 체계를 경험 과학의 영역으로 확대하려고 했을 때, 그의 그러한 시도는 단지 영역의 확대에 그치지

19) 이러한 용어의 동의성은 이미 카르납도 언급한 바 있다(pp. 365-6).

20) 어떤 공리 체계  $S$ 가 ‘연역적으로 완전하다’는 것은 관련 언어 내의 모든 명제  $p$ 에 대해  $S$ 로부터  $p$  아니면  $\sim p$ 가 연역 가능함을 의미한다(Reck 2007, p. 184). 괴델의 제1 불완전성 정리에서는 바로 페아노의 공리 체계를 예로 들어 이와 같은 연역 가능성을 부정하고 있다.

21) 예컨대 Awodey & Carus 2001, p. 155 참조. 이와 관련해 또한 Hahn et al. 1931, p. 148 참조.

않고 그 자체로 형식적인 공리 체계를 개발하는 데 매우 중요한 의의를 지닐 수 있다. 임의의 공리 체계를 형식적으로 구성할 경우, 그것의 일관성은 매우 중요하다. 만일 그러한 조건이 지켜지지 않는다면, 언제든지 그로부터 서로 모순된 명제 함수를 이끌어 낼 수 있고, 이로써 다시 표현 가능한 어떠한 명제 함수라도 이끌어 낼 수 있기 때문이다. 이와 같이 된다면, 그 공리 체계는 결국 사소한 체계가 되고 말 것이다. 하지만 어느 공리 체계 내에서 암묵적으로 정의된 원초 용어가 분명한 의미를 지녀 그것이 좀더 정확하게 사용될 수 있도록 하기 위해서는 그 체계가 일관적이라는 것만으로는 부족하다. 예컨대 앞서 제3절에서 논의한 대로, 공리 체계 *AS I*에 머물 것인지 아니면 *AS IIa*로 나아갈 것인지를 결정해 주는 것은 그 체계의 일관성 여부가 아니다. 그것은 해당 공리 체계에 대해 경험적이건 형식적이건 어떤 해석을 염두에 두었을 때에만 결정할 수 있는 일일 뿐이다. 앞서 논한 대로, 카르납은 이를 형식적 모델에 의한 해석으로 단일화해, 공리 체계의 단형성, 즉 절대성을 보장할 수 있도록 해당 체계를 구성해야, 그 체계로 정의되는 원초적 용어의 의미가 분명해질 수 있다고 제안한 셈이다. 물론 이러한 절대성이 곧 해당 체계의 연역적 완전성을 보장하는 것은 아니다. 하지만 하나의 공리 체계 내에서 암묵적 정의의 문제를 어떻게 처리하고, 이 면에서 그 체계를 어떻게 개발해야 하는가에 관한 방향 제시는 이루어진 셈이다.<sup>22)</sup>

- 
- 22) 이 점에서, 나는 카르납이 그의 초기부터(Carnap 1992) 공간을 형식적인 것과 물리적인 것으로 나누고(물론 이 이외에 또한 직관적 공간을 구별하여 제시하고 있으나, 이는 지금의 논의와는 직접 연관이 없다), 이에 따라 그 각각의 공간론으로서 수학적 기하학과 물리적 기하학을 나눈 일 역시 새로운 각도에서 재조명할 필요가 있다고 생각한다. 물론 일반적으로는(또는 카르납 자신도 포함해) 이와 같은 구별들은 공간론을 둘러싼 불필요한 논란을 해소시키기 위한 것으로 평가하고 있으나(예컨대 Howard 1996, pp. 145-6; Carnap 1922, p. 5), 만일 지금까지 우리의 논의의 관점에서 보자면, 양자는 단순히 구별될 뿐만 아니라, 적어도 암묵적 정의와 관련해 전자의 개발을 위해 후자가 필연적이라 말할 수도 있다. 이 점에서, 힐베르트식의 기하학이 수학적 기하학이라면, 그것은 카르납식의 물리적 기하학을 염두에 두고 개발되지 않을 수 없다. Carnap 1963, p. 48에서 카르납 자신이 물리학자로서 기하학에 관심이 있다고 언급한 이상으로 나는 그러한 관심이 힐베르트식의 기하학을 개발하는 데 본질적이라 생각한다.

이러한 면은, “일반 공리론 탐구”에서 카르납의 잘못이 궁극적으로 어디에 놓여 있는가를 보여 주는 좀더 최근의 논의를 통해 오히려 한층 더 세밀하게 보여 줄 수 있다고 생각한다. 앞서 제4절에서 언급한 대로, 괴델에 따르면, 어느 공리 체계가 절대적이라 하더라도 반드시 그것이 연역적으로 완전하다고 말할 수는 없다. 만일 오늘날 괴델의 증명을 승인한다면, 우리는 카르납의 증명에서 무엇이 문제가 있는가를 지적해야만 한다. Awodey & Carus (2001, pp. 158-9), Reck (2007, pp. 188-90)에서는 공히 카르납이 적어도 당시에는 탐구 대상인 형식적 공리 체계와 관련해 그 대상 언어와 메타 언어를 분명하게 구별하지 못했었다고 지적한다. 곧 카르납은 탐구 대상이 되고 있는 공리 체계 자체에 대해서나 그에 대해 탐구할 때에나 보편적으로 사용할 수 있는 어떤 논리적 기초(즉 논리, 산술, 집합론의 기본 원리)가 있다고 보고(이 점은 그의 논리주의의 연장이다), 그것을 양자의 경우에 아무런 구별 없이 사용했었다는 것이다. 이러한 결과, 나타나는 잘못은 다음과 같다.

앞서 4절에서 언급한 대로, 카르납은 분기 가능성의 정리에 이르기 전에 먼저 어떤 형식적 공리 체계의 분기 불가능성과 결정 가능성이 서로 동치임을 보여 주려 하였다. 그런데 이 과정에는, 해당 공리 체계가 일관적이라면, 그것은 반드시 만족된다는, 즉 그것에는 ‘해당 체계를 만족시키는 모델이 반드시 존재하고, 그 역도 성립한다’는 전제가 사용된다. 이렇게 되어야만 공리 체계에서의 귀결 관계와 그것의 만족성이 연결될 수 있기 때문이다. 그러나 이것이 어떻게 가능한가. 바로 위에서 언급한 학자들의 분석에 따르면, 다음과 같다.

어느 형식 체계  $f$ 가 결정 가능하기 위해서는 우선 그것은 다음과 같은 의미로 일관적이어야만 한다: 즉 어느 명제 함수  $g$ 에 있어서도  $g$ 와  $\sim g$ 가 동시에  $f$ 의 귀결이 되지는 않는다는 것이다. 달리 표현해 ‘어느  $g$ 에 대해서도  $f \vdash g$ 와  $f \vdash \sim g$ 가 동시에 성립하지는 않는다’는 것이다. 이를 두고 카르납은 그의 “일반 공리론 탐구”에서 다음과 같이 기호화한 바 있다.

$$\sim(\exists g)(f \vdash g \ \& \ f \vdash \sim g) \quad (5.1)$$

그리고 앞의 4절에서 소개한 방식에 따라, 이를 다시 다음과 같은 방식으로 바꿔 주고 있다.

$$\sim(\exists g)((\forall R)[(f(R) \rightarrow g(R)) \ \& \ (\forall R)[f(R) \rightarrow \sim g(R)]] \quad (5.2)$$

그렇다면 이로부터 바로  $(\exists R)f(R)$ 을 이끌어 낼 수 있고,<sup>23)</sup> 실제 카르납은 이와 같이 하고 있다(Carnap 1928b/2000, p. 100). 이 결과는, 사실, 문제의 체계가 만족되었음을 뜻하고, 따라서 앞서 언급한 전제가 성립하는 것으로 보인다. 하지만 바로 여기에 카르납의 잘못이 있는 것이다. ‘어느  $g$ 에 대해서도  $f \rightarrow g$ 와  $f \rightarrow \sim g$ 가 동시에 성립하지는 않는다’는 것으로부터 위의 (5.1)과 같이 나아가는 일은 마치 ‘not  $\vdash p$ ’와 ‘ $\vdash \sim p$ ’를 같은 의미로 보는 것으로, 이는 공리 체계에 ‘대해’(about) 말해야 할 것을 공리 체계 ‘내’(in)의 것으로 말하는 것으로 볼 수 있다. 그러므로 이 경우 카르납에게서는 공리 체계에 대한 진술의 증명 가능성과 그 체계 내에서의 증명 가능성이 구별되지 않고, 그가 보편적으로 사용할 수 있다고 보는 논리의 기초에 의해 이미 논리적 해석이 가해진 참 또는 거짓의 명제들만이 존재하는 것이다. 그러므로 이러한 면에서 보자면, 카르납이 보여 주려 했던 바, 어느 체계에서의 분기 불가능성과 결정 가능성이 동치라는 주장은 적어도 언제나 성립될 수 있는 주장은 아닌 셈이다. 그런데 공리 체계  $f$ 가 명제 함수  $g$ 에서 분기 불가능하다면,  $f$ 와  $g$ , 그리고  $f$ 와  $\sim g$ 가 동시에 만족되는, 즉 하나의 모델을 갖는  $g$ 가 없다는 뜻이고, 이는 오늘날 ‘의미론적 완전성’(semantic completeness)이라 부르는 것이다. 그러므로 카르납에 있어 연역적 완전성과 의미론적 완전성은 결코 언제나 동치가 될 수 있는 것은 아니며, 이는 결국 괴델의 불완전성 정리가 보여 주는 바이다.<sup>24)</sup>

23) 술어 논리적으로 볼 때, (5.2)는  $(\forall g)((\exists R)[f(R) \cdot (\sim g(R) \vee \sim g(R))]$ 와 논리적 동치이고, 이로부터 곧  $(\exists R)f(R)$ 을 이끌어 낼 수 있을 것이다.

24) 위의 식 (5.1)이나 (5.2)에서 ‘ $\rightarrow$ ’을 의미론적 귀결로 본다면 연역적 완전성과 의미론적 완전성 사이에 동치 관계는 성립하나 사소한(trivial) 결과일 뿐이며, 구문론적으로 본다면 그 동치 관계는 성립하지 않는다. 후자의 경우, 연역적 완전성이 성립하면 의미론적 완전성이 성립하나, 그 역은 괴델의 불완전성 정리에

하지만 절대성과 의미론적 완전성 사이의 동치를 주장하는, 카르납의 분기 불가능성 정리는 어떠한가. 의미론적 완전성으로부터 절대성으로 나아가는 방향은, Awodey & Carus (2001, pp. 161-2)나 Reck (2007, p. 195)에 따르면, 특수한 경우들에는<sup>25)</sup> 성립함이 밝혀졌으나, 일반적으로는 아직 완전히 입증되지 않은 채 열려 있는 상태이다. 다만 적어도 그 반대의 방향, 즉 절대성으로부터 의미론적 완전성으로 나아가는 방향은 카르납의 증명 그대로(Carnap 1928b/2000, pp. 133-5) 문제가 없는 것으로 인정받고 있다. 더군다나, 이 경우라면, 그 관계가 1계 논리나 2계 논리 모두에서 성립될 수 있다. 사실상 괴델의 불완전성 정리는 1계 논리나 2계 논리 모두에 대해 광범위하게 적용된다. 오직 1계 논리로 표현될 수 있는 제한된 공리 체계 내에서만 연역적 완전성이 성립될 뿐이다(Gödel 1930/95). 그러므로 1계 논리상으로는 연역적으로든 의미론적으로든 문제없이 완전한 공리 체계란 거의 없는 셈이다. 하지만 2계 논리와 같은 고계(higher-order) 논리상으로는 많은 공리 체계가 의미론적으로 완전한 것으로 밝혀져 있다(Reck 2007, p. 194)<sup>26)</sup>. 사실, 앞서 제3절에서 논한 대로, 카르납은 힐베르트의 공리 체계를 다루면서 고계 논리를 염두에 두고 있었다. 그러므로 만일 고계 논리의 틀 내에서 공리 체계의 의미론적 완전성을 문제삼는다면, 그 절대성에 대한 요건에 비춰, 우리는 해당 체계가 완전한지의 여부를 판정할 수 있는 (연역적 완전성에 관한 것 이외의) 또 다른 하나의 관점을 얻게 된 셈이다.

이제 이 지점에서, 앞서 제3절에서 인용한 대로, 단지 개념들의 뼈대일 뿐인 형식적 공리 체계의 기본 요소들은 우리가 원하는 무엇이든 상관없이 가능하다는 점을 밝힌, 프레게에의 답신으로 돌아가, 힐베르트가 바로 그에 이어 제시한 다음과 같은 대목에 주의해 보자.

---

따라 성립하지 않는 것이다(Reck 2007, p. 190n).

- 25) 예컨대 문제의 체계가 유한하며, 비논리적 상항이 전혀 없는 단순 유형 이론(simple type theory with no non-logical constants)의 틀 내에서 해당 체계를 다루는 경우가 이에 해당한다.
- 26) 이와 관련해 Awodey & Reck 2002에서는 여러 의미의 완전성을 탐구하는 데 고계 논리학이 적절한 틀이 될 것이라 강조하고 있다.

[달리 말해] 어떠한 이론이든 언제나 기본 요소들로 이루어진 무한히 많은 체계들에 적용 가능하다. 이 때 오직 필요한 것은 가역적인 일대일 변환(reversible one-one transformation)일 뿐이며, 따라서 문제의 공리들이 그렇게 변환된 것들에 대해 언제나 동일함을 확립하는 일이다[...]. [예컨대] 정전기 이론의 모든 명제들은 전기량 ... 등등 대신 다른 것들로 대체된 어느 다른 체계에 있어서도, 그 필요한 공리들이 만족되는 한, 여전히 성립하는 것이다. (Hilbert 1899b/1980, p. 42)

이 대목은 분명 힐베르트가 모델들 사이의 동형성과 그것을 가능케 하는 공리 체계의 단형성 내지 절대성의 중요성을 잘 인식하고 있었음을 보여 주고 있는 대목으로 보인다. 하지만 그는 공리 체계의 이와 같은 절대성이 그 체계의 의미론적 완전성을 보장할 수 있는 가능성에 관해서는 적어도 카르납과 같이 보여 주지는 못하였다.<sup>27)</sup> 그러므로 힐베르트의 지지자인 콜셀트의 다음과 같은 해명과 그에 대한 프레게의 공방에 대해 힐베르트가 더 이상 보여 줄 수 있는 것은 아무 것도 없었던 셈이다.

[...] [(예컨대 앞서의 제1장에서 프레게의 예를 통해 보여 준 바와 같이) 힐베르트식의 공리 체계에서 보이는 “설명”(explanation), 즉 어떤 경험적 대상과의 연계를 설명하는 부분은] <형식적인> 이론 [자체]에 속하는 것이 아니라 그것에 대한 해석에 속한다[...]. 그러한 “설명”은 해당 이론의 <전제>(presupposition)로 보아서는 안 되며, 따라서 그 이론에 영향을 미칠 수 없다.

그러한 “설명”과 [그에 준하는] 모든 원리들이 과연 그것(만)으로 어느 대상, 예컨대 프레게 선상의 회중 시계와 같은 것에 꼭 맞는지 아닌지의 여부를 알 수 있는 방식으로 구성되어야만 하는 것인가? 단순히 설명만으로는 결코 그렇게 할 수 없음은 분명하다! 이를 위해서는 결국 경험, 즉 감각적 지각이 필요하다. [...] 그의 회중 시계가 주어진 명제를 충족

27) 힐베르트나 그 학파의 일원들이 공리 체계의 완전성 문제에 본격적으로 관심을 갖기 시작한 것은 1920년대 들어서이다(예컨대 Hilbert & Ackermann 1938/50 (초판은 1928), pp. 42f., 92f. 참조). 그러나 그들은 절대성과 의미론적 완전성 사이의 관계에 관해 카르납만큼 명료한 문제 의식을 갖고 그것을 개발하지는 못하였다. 물론 카르납 역시 여러 의미의 완전성의 존재에 관해서는 프랭클(Fraenkel 1928/46, 초판은 1919, 참조)의 도움을 받았으나, 그것들 사이의 관계에 관해 제대로 천착한 이는 카르납뿐이다(Reck 2007, pp. 182-85 참조).

시키는지의 여부에 대해 알고자 하는 사람은, 그것을 결정해 줄 수 있는 어떤 새로운 명제를 알게 되든지 아니면 어떤 시계 수리공이 그의 회중시계를 수리하게 될 때까지는[그리하여 문제의 회중시계가 주어진 명제를 충족시키는지의 여부를 구체적 맥락에서 직접 경험적으로 확인할 때까지는] 그저 해당 설명을 그 시계에 적용하는 일을 금해야 할 것이다. 우리 인간은 결국 전지(全知)할 수 없다. 그러므로 인내를 가질 일이다! 현재 “어떤 대상이 어떤 개념에 속하는지”(falling of an object under a concept) 결정을 내릴 수 없다는 사실 때문에 그 개념의 올바름과 유용성에 문제가 있다고 입증할 만한 것은 아무 것도 없다. (Korselt 1903/1971, pp. 44-5, 강조 원문)

점에 관한 어떤 정의에 대해 내가 요구하는 바는 그 정의에 의해 우리가 어떤 대상에 대해서든—예컨대 나의 회중시계에 대해—그것을 판단할 수 있어야만 한다는 것이다. 하지만 콜셀트 선생은 이 점을 오해하고, 어떤 경험적 지각의 도움 없이 그 정의만으로 곧 그러한 문제를 결정할 수 있어야만 한다고 내가 요구하는 것으로 잘못 생각하여, 그러한 일은 불가능하다고 주장한다. 물론 옳다! 어느 주어진 돌이 다이아몬드인지의 여부 문제는 “다이아몬드”라는 말 자체에 대한 설명만으로는 결코 답할 수 없다. 그러나 우리는 그 설명이 그러한 문제에 대해 객관적으로 해결해 줄 수 있어야 한다고는 요구할 수 있다. 즉 문제의 돌에 익숙한 사람이라면 누구나 그러한 설명에 의해 해당 돌이 다이아몬드인가 아닌가는 결정해 줄 수 있어야만 하는 것이다. 그러므로 우리가 위와 같은 문제에 답할 수 없는 것이 단순히 문제의 대상에 대한 우리의 불완전한 지식 때문이라면, 그 때의 설명에 대해 비난할 것은 없다. 하지만 우리의 지식이 아무리 완전해진다 할지라도 그러한 문제가 답할 수 없는 채로 남아 있다면, 그 때의 설명은 잘못이다. 이것이야말로 지금 내가 문제삼고 있는 것이다. (Frege 1906/71, p. 63)

이 공방에서 콜셀트는 지금 단순히 ‘어떤 대상이 어떤 개념에 속하는지’가 문제가 되는 것은 아니라는 점을 정확히 인식하지 못하고 있으며, 프레게는 바로 이러한 점에 대해 불만을 토로하고 있다. 하지만 이제 카르납의 입장에서 말하자면, 프레게의 그와 같은 불만에 대해서는 적어도 공리 체계의 절대성을 확보함으로써 예컨대 ‘다이아몬드’라는 개념 자체의 의미를 명료하게 해 줄 수 있다고 답할 수 있는 것이다.

요컨대 암묵적으로 정의된 용어들의 의미가 명료해지기 위해서는 해당

용어들을 정의해 주는 공리 체계가 고계 논리로 표현되고 그것이 절대성을 지녀 (비록 연역적으로는 완전하지 않을지라도) 의미론적으로 완전할 필요가 있다는 것이 힐베르트식의 공간론에 대해 적어도 카르납이 기여할 수 있는 한 가지 분명한 결론이라 할 것이다.

## 결 어

카르납의 지적대로(Carnap 1963, p. 48), 술리어나 카르납 자신 모두 순수하게 수학으로부터 출발한 것이 아니라, 물리학으로부터 출발해 수학에 관심을 갖게 된 이들이다. 이들의 관점에서, 공간에 관한 힐베르트식의 공리 체계에서 중요한 점은 경험 과학에서 암묵적 정의의 가능성 여부였다. 카르납은 이러한 방향에서 그와 같은 정의의 방식이 경험 과학에서도 역시 유용할 수 있음을 본격적으로 보여 주려 하였다. 이러한 시도 가운데, 오늘날의 관점에서 보면, 보편 논리를 신봉했던 그의 논리주의적 기반은 받아들이기 어려우나, 암묵적 정의의 의미를 명료히 하기 위해서라면 의미론적 측면에서 해당 공리 체계의 절대성을 보장해 의미론적 완전성을 확보해야 한다는 주장은 공간론을 공리적으로 전개함에 있어 필수적인 요건이라 할 것이다.

## 참고문헌

- 최원배 (2008), "존재와 일관성을 둘러싼 프레게/힐버트 논쟁," 미발간 논문.  
 Awodey, S. & A. W. Carus (2001), "Carnap, Completeness, and Categoricity: The Gabelbarkeitssatz of 1928," *Erkenntnis* 54, pp. 145-72.  
 Awodey, S. & C. Klein (eds.) (2004), *Carnap Brought Home: The View from*

Jena, Chicago: Open Court.

- Awodey, S & E. H. Reck (2002), "Completeness and Categoricity, Part I: Nineteenth-century Axiomatics to Twentieth-century Metalogic," *History and Philosophy of Logic* 23, pp. 1-30; "Part II: Twentieth-Century Metalogic to Twenty-first-Century Semantics," *ibid.*, pp. 77-94.
- Carnap, R. (1922), *Der Raum: Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre*, Berlin: Reuther & Reichard.
- (1927), "Eigentliche und Uneigentliche Begriffe," *Symposion I*, pp. 355-74.
- (1928a), *Der logische Aufbau der Welt*, English trans. *The Logical Structure of the World*, London: Routledge & Kegan Paul, 1967.
- (1928b), *Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik*, hrsg. von T. Bonk & J. Mosterin, Darmstad: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 2000.
- (1963), "Carnap's Intellectual Autobiography," in P. A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, LaSalle: Open Court, pp. 3-84.
- Chihara, C. S. (2004), *A Structural Account of Mathematics*, Oxford: Clarendon.
- Coffa, J. A. (1991), *The Semantic Tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Corry, L. (2004), *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918)*, Dordrecht: Kluwer Academic.
- Fraenkel, A. (1928), *Einleitung in die Mengenlehre*, 3rd ed., New York: Dover, 1946.
- Frege, G. (1900), "Frege to Hilbert 6.1.1900," in G. Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Chicago: The Univ. of Chicago Press, 1980, pp. 43-8.

- \_\_\_\_\_ (1903), "Über die Grundlagen der Geometrie," English trans. "On the Foundations of Geometry," *The Philosophical Review* 69 (1960), pp. 3-17.
- \_\_\_\_\_ (1906), "Über die Grundlagen der Geometrie," English trans. "On the Foundations of Geometry," in *Gottlob Frege: On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, New Haven: Yale Univ. Press, 1971, pp. 49-112.
- Friedman, M. (1999), *Reconsidering Logical Positivism*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Friedman, M. & R. Creath (eds.) (2007), *The Cambridge Companion to Carnap*, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Froese, N. (2007), "Euklid und die Elemente," <http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html>.
- Gabriel, G. (2007), "Carnap and Frege," in M. Friedman & R. Creath (eds.), *The Cambridge Companion to Carnap*, op. cit., pp. 65-80.
- Giere, R. N. & A. W. Richardson (eds.) (1996), *Origins of Logical Empiricism*, Minneapolis: Univ. of Minnesota Press.
- Goldfarb, W. (1996), "The Philosophy of Mathematics in Early Positivism," in R. N. Giere & A. W. Richardson (eds.), *Origins of Logical Empiricism*, *ibid.*, pp. 213-30.
- Gödel, K. (1930), "Vortrag über die Vollständigkeit des Funktionenkalküls," in *Collected Works*, Vol. 3, Oxford: Oxford Univ. Press, 1995, pp. 16-29.
- \_\_\_\_\_ (1931), "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I," in *Collected Works*, Vol. 1, Oxford: Oxford Univ. Press, 1986, pp. 144-95.
- Hahn et al. (1931), "Diskussion zur Grundlagen der Mathematik," *Erkenntnis* 2, pp. 135-49.
- Hilbert, D. (1899a), *Grundlagen der Geometrie*, English trans. *The*

- Foundations of Geometry*, Merchant Books, 2007.
- \_\_\_\_\_ (1899b), "Hilbert to Frege 29.12.1899," in G. Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, op. cit., pp. 38-43.
- \_\_\_\_\_ (1918), "Axiomatisches Denken," *Mathematische Annalen* 78, pp. 405-15.
- Hilbert, D. & W. Ackermann (1938), *Grundzüge der Theoretischen Logik*, 2nd ed., English trans. *Principles of Mathematical Logic*, New York: Chelsea, 1950.
- Howard, D. (1996), "Relativity, Eindeutigkeit, and Monomorphism: Rudolf Carnap and the Development of the Categoricity Concept in Formal Semantics," in R. N. Giere & A. W. Richardson (eds.), *Origins of Logical Empiricism*, op. cit., pp. 115-64.
- Hung, T. (1949), "Moritz Schlick and Modern Empiricism," *Philosophy and Phenomenological Research* 9, pp. 690-708.
- Korselt, A. (1903), "Über die Grundlagen der Geometrie," English trans. "On the Foundations of Geometry," in *Gottlob Frege: On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, op. cit., 1971, pp. 38-48.
- Mormann, T. (2007), "Geometrical leitmotifs in Carnap's early philosophy," in M. Friedman & R. Creath (eds.), *The Cambridge Companion to Carnap*, op. cit., pp. 43-64.
- Otero, M. H. (1970), "Gergonne on Implicit Definition," *Philosophy and Phenomenological Research* 30, pp. 596-9.
- Parrini, P. et al. (eds.) (2003), *Logical Empiricism: Historical and Contemporary Perspectives*, Pittsburgh: Univ. of Pittsburgh Press.
- Reck, E. H. (2007), "Carnap and modern logic," in M. Friedman & R. Creath (eds.), *The Cambridge Companion to Carnap*, op. cit., pp. 176-99.
- Reichenbach, H. (1920), *Relativitätstheorie und Erkenntnis Apriori*, English

trans. *The Theory of Relativity and A Priori Knowledge*, Berkeley: Univ. of California Press, 1965.

Schlick, M. (1925), *Allgemeine Erkenntnislehre*, 2nd. ed., English trans. *General Theory of Knowledge*, Chicago: Open Court, 1985.

——— (1926), "Erleben, Erkennen, Metaphysik," *Kant-Studien* 31, pp. 146-58.

ARTICLE ABSTRACTS

---

## Hilbert and Carnap on Theory of Space

Young Sam Chun

---

Although it is still not well known generally, it has recently emerged by actively throwing new light on Carnap that he had much closer connections to Hilbert than we have thought, in the late 19th and early 20th centuries, the splendid period in the development of mathematics and logic. Against the historical background, in this paper, I explicate and examine Hilbert's way of implicit definition from Carnap's perspective, emphasizing that such a definition was the focus of Carnap's investigation of Hilbert's theory of space. It is thus argued that Carnap showed that the task of clarifying the meanings of the primitive terms defined implicitly requires them to be put in an axiomatic system which is formulated within a framework of higher-order logic and is categorical enough to be complete semantically. That is one of his firm contributions to Hilbertian theory of space.

[Key Words] Hilbert, Carnap, theory of space, implicit definition,  
semantic completeness