

괴델 이후의 힐베르트와 카르납: 체계 상대성 문제를 중심으로*†

전 영 삼‡

본 논문에서는 괴델 이후 힐베르트주의자들과 카르납에 있어 체계 상대성의 의미를 비교·검토하고 있다. 이로써 그들 양자 사이의 체계 상대성에 대한 차이가 어떻게 일관성에 대한 증명의 강박 여부로 나타났는가를 밝히게 된다. 이러한 작업의 결과, 최근까지 여전히 남아 있는 카르납에 대한 몇몇 오해를 명료히 해소하여, 그러한 작업의 유용성을 예증코자 한다.

【주요어】 힐베르트, 카르납, 괴델, 체계 상대성, 일관성 증명

대상 시기의 면에서, 본 논문의 관심사는 수학 및 논리의 영역에서 ‘괴델 이후’에 놓여 있다. 물론 양영역에서 괴델의 충격은 그 자체로 심대한 것이었다. 하지만 그 충격이 두 영역에서 추구하는 근본 목표들을 그 가능성 면에서 모두 완전히 궤멸시키는 것이 아닌 한, 그러한 충격에도 불구하고 어떠한 목표가 계속 추구될 필요가 있으며, 또 어떤 면에서 그 가능성이 있는가를 살피는 일은 괴델 이후의 가장 원론적인 관심사일 수밖에 없다.

* 접수완료: 2009.10.27 / 심사완료 및 게재확정: 2009.12.05 / 수정완성본 접수: 2009.12.14

† 이 논문은 2007년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2007-321-A00025). 본 논문에 대해 다시 한번 깊이 되돌아볼 수 있도록 해 준 두 분 심사 위원께 감사 드린다. 필요한 만큼 해당 부분에서 각주로 답하고자 하였다.

‡ 고려대 철학과 강사

물론 나는 이 논문에서 이 거대한 작업을 모두 다 해 낼 수는 없다. 다만 위와 같은 문제의식 하에 좀 더 특정하게 힐베르트와 카르납을 연계지어 그러한 문제에 답하고자 한다. 특별히 이 두 사람에 주목하는 까닭은, 역사적으로 그들 각각이 수학과 논리의 영역에서 큰 영향력을 발휘한 인물이었다는 점 이외에, 무엇보다 그들 자신이 모두 (역설적이게도) 괴델이 등장할 수밖에 없었던 바탕을 이루었던 두 인물이었다는 점 때문이다. 하지만 좀 더 중요하게는, 괴델 이후 이른바 ‘힐베르트 프로그램’이 주요하게 체계 상대적인 일관성 증명의 방식으로 나아가는 것과 마찬가지로, 카르납의 논리적 구문론 역시 체계 상대적인 특징을 보여 주고 있기 때문이다. 그렇다면 양자의 이와 같은 체계 상대성에 차이가 있는 것인가 없는 것인가. 만일 차이가 있다면, 그것은 무엇이며, 그 까닭은 무엇인가. 그리고 그 결과는? 나는 이에 대한 고찰이야말로 괴델 이후의 수학 및 논리를 바라보는 데 상당한 기여를 할 수 있다고 보고, 이하에서 그러한 고찰을 행하고자 한다.

이러한 고찰의 핵심은, 체계 상대성에 대한 양자의 차이가 결국 일관성 증명에 대한 강박의 여부를 가름을 보이고, 그 까닭을 밝히는 일이 될 것이다. 이러한 작업의 결과, 또한 아직도 남아 있는 것으로 보이는 카르납에 대한 몇 가지 오해를 어떻게 명료하게 해소할 수 있는가를 보여, 내 작업의 유용성을 예증코자 한다.

1. 괴델에 이르기까지: 힐베르트와 카르납

힐베르트와 카르납을 연계지어 괴델 이후의 상황을 제대로 논하기 위해서 먼저 괴델에 이르기까지 양자가 공유했던 상황에 대한 약술이 필요할 듯하다.

이러한 관점에서 그 주요한 공통점은 수학에 대한 이른바 ‘공리화’ 작업의 필요성에 대한 인식이었다. 카르납이 힐베르트의 작업에 관심을 갖고 자신의 이론을 전개한 것도 그러한 작업과 관련이 있고, 괴델이 힐베르트의 작업에 충격을 가하게 된 초점도 바로 그러한 작업에 놓여 있기

때문이다. 더군다나 이러한 사정은 본 논문에서 관심을 두고 있는 체계 상대성의 문제에 대한 직접적인 배경이 되기도 한다.

여타의 이유를 더 들 수 있을지 모르나,¹⁾ 카르납과의 위와 같은 공통 점을 염두에 둘 때, 힐베르트가 수학의 공리화 작업을 중시한 까닭은, 다소 비유적일지 모르나, 무엇보다 다음과 같은 커다란 학문적 판도에 대한 인식 때문이었다.

마치 국가의 운명에 있어 각 국가가 번성할 수 있는 것은 그 모든 이웃 국가들이 온전한 상태에 있을 때뿐이듯, 그리고 국가의 이익을 위해서는 개별 국가의 질서가 유지될 뿐만 아니라 다른 국가와의 사이에서도 그러할 필요가 있듯, 학문의 운명에 있어서도 이와 꼭 마찬가지로 지이다. 마땅히 이러한 사실을 인식함으로써, 뛰어난 수학적 사고를 지닌 사람들은 언제나 이웃 학문들의 법칙과 구조에 커다란 관심을 표명했던 것이다. 무엇보다 수학 자체의 이득을 위해 그들은 언제나 이웃 학문들, 특히 물리학이나 인식론과 같은 위대한 학문 영역과의 관계를 천착해 왔다. 이러한 관계의 본질, 그리하여 그것이 풍성한 결실을 맺게 되는 이유는, 이제 내가 보여 주는 바, 현대 수학으로 점점 더 유입되고 있는 것으로 보이는 한 가지 일반적인 연구 방법을 제시함으로써 극명하게 드러나리라 믿는다. 바로 <공리적 방법>을 말한다. (Hilbert 1918/96, p.1107, 강조 원문)

이 때 왜 그러한 공리적 방법이 굳이 지금과 같은 학문적 상황에 적합한가는 그의 다음과 같은 언급을 통해 쉽게 확인할 수 있다.

[...] 점이라는 개념에 대한 정의는 해당 공리 체계의 구조가 완결되기 전까지는 완결되지 않는다. 왜냐하면 모든 공리 하나하나가 그 정의에 나름의 기여를 하고, 따라서 새로이 추가되는 공리들이 그 개념에 변

1) 예컨대 어떤 이론의 숨겨진 가정들을 정밀하게 명료화하거나 연역적 엄밀성을 유지하고자 하는 등의 이유가 있을 수 있다(Hallet 1994 참조). 하지만, 바로 아래에서 내가 보여 주려는 대로, 헬릿 역시 여러 이론들이 통합되고 서로 연관되는 방식에 대한 이해야말로 힐베르트의 공리적 방법의 성격을 이해하는 데 한층 더 중요하다고 보고 있다(p.169). 다만 헬릿은, 나의 관심사와는 달리, 자신의 그러한 시각을 사고의 성격에 대한 힐베르트의 태도를 드러내는 데 적용하고 있을 뿐이다.

화를 줄 수 있기 때문이다. 유클리드, 비유클리드, 아르키메데스, 비아르키메데스 기하학상의 점은 각각의 경우에 서로 다른 무엇이다. 하나의 개념이 일단 완전하고도 명료하게 고정된 이후라면, 거기에 하나의 공리를 덧붙인다는 것은 부당하며 비논리적인 일이 될 것이다—이것이야말로 물리학자들이 매우 흔히 범하는 실수이다. (Hilbert 1899b/1980, p.42)

[...] 전기 이론상의 모든 진술들은, [...] 자기나 전기 ... 등등의 개념을 대신할 수 있는 어느 다른 것들의 체계에 대해서든, 만일 그것이 해당 공리들을 만족시키기만 한다면, 여전히 타당하다. [이러한] 상황은 하나의 이론에서 결코 흠이 아니며[오히려] 커다란 이점이다—힐베르트의 각주], 어느 경우에도 피할 수 없는 것이다. (ibid., p.41)

요컨대 수학 자체나 주변 학문들의 '계속적인 발전'에 맞춰 개념 체계를 구성하고자 한다면, 공리적 방법이 불가피하다는 것이다.

하지만 이러한 의도로 구성되는 공리 체계는 과거 유클리드 기하학 체계에서와 같이 어떤 직관에 의해 이미 참으로 여겨지는 공리들로 구성되는 체계일 수 없다. 주지하는 대로, 그는 프레게에 보낸 서신에서 다음과 같이 말하고 있다.

[...] 모든 이론이[즉 모든 형식적 공리 체계가] 단지 서로 필연적인 연관성을 지닌 개념들의 뼈대(scaffolding/schema)일 뿐이며, 그 기본 요소들이란 우리가 원하는 대로 무엇으로 생각하든 상관없다는 점은 분명하다. 예컨대 점 대신에, 사랑, 법률, 굴뚝 청소부, ... 그 어느 것의 체계든 [문제의] 모든 공리들을 만족시키는 것이라면 아무런 문제가 없다. 그러므로 이 경우 피타고라스의 정리조차 그러한 것들에 적용 가능하다. 어느 이론이든 언제든 무한히 많은 기본 요소들의 체계에 적용 가능할 것이다. (Hilbert 1899b/1980, p.42)

이미 힐베르트의 이와 같은 공리화 작업의 취지에 대해 잘 알고 있었던 카르납은 자신의 철학 내에서 힐베르트식의 공리화 작업이 지닌 의미에 대해 다음과 같이 말하고 있다.

각 실재적[즉 경험적] 개념은 [...] 실재와 직접적인 연관성을 갖고 있다. 반면, 비논리적 개념들은 말하자면 공중에서 떠돌 뿐이다. 이것들은

공리 체계에 의해 도입되는데, 실재와는 직접 연결되지 않는다. 그러한 체계의 공리들이나 그로부터 연역되는 정리들은 적절하게 하나의 이론을 형성하는 것이 아니라(왜냐하면 그것들은 특정한 어떠한 것도 다루고 있지 않기 때문이다), 단지 이론의 도식(Theorie-Schema), 즉 가능한 어떤 이론들을 위한 빈 형식(Leerform)일 뿐이다. (Carnap 1927, p.372)

여기서 카르납이 말하는 ‘비본래적’(uneigentlich) 개념이란, 위에서와 같은 힐베르트식의 공리 체계를 통해 암묵적으로 정의되는 개념을 말한다. 그것은 암묵적으로 정의되는 까닭에, 위에서 카르납이 지적하고 있는 대로, 경험적 대상과 직접 연계되지 못하고 ‘공중에서 떠돌’ 위험성이 있다. 그러므로 그것은 어디까지나 하나의 이론 도식일 뿐이나, 바로 이 때문에 그것은 <가능한> 어떤 이론을 위한 중요한 기능을 할 수 있게 되는 것이다. 우선 “만일 우리가 그 공리 체계 내에서 문제의 비본래적 개념에 주어진 형식적 특성을 지닌 어떤 경험적 개념을 발견할 수만 있다면, 그로써 곧 “그 체계는 하나의 실현 사례를 발견하게” 된다. 달리 말해 그러한 발견으로 인해 “하나의 변항 [역할을 하는] 비본래적 개념의 자리에 그에 대응하는 경험적 개념이 대입되는” 셈이다(ibid.). 만일 이렇게만 될 수 있다면,

[경험적] 개념과 [...] 공리들의 이와 같은 접촉을 통해, 해당 공리 체계에 의존한 이론 도식 전체와도 단 한번에 어떤 연관성이 형성된다. 이 연관점을 통해 경험적 실재의 피가 흘러들고, 지금까지 비어 있던 도식의 가장 세세한 모세 혈관으로까지 그 피가 흘러가, 문제의 도식은 내용이 채워진 하나의 이론으로 변모하는 것이다. (ibid., p.373)

그러므로 카르납의 견지에서, 암묵적으로 정의된 비본래적 개념들을 설정하고 그에 대해 타당한 정리들을 연역해 내는 일은 결국 위와 같은 이론 도식을 예비해 두는 일이며, 이러한 도식의 유용성은 추후 그것을 다양하게 응용할 수 있다는 데 놓여 있다. 즉 동일한 하나의 도식을 이후 여러 다른 실제적 체계에 적용할 수 있는 가능성을 열어 두는 일에 다름 아니다.

하지만 힐베르트는 자신이 생각하는 공리 체계가 제 기능을 발휘할 수 있기 위해서는 하나의 체계로서 그것이 지녀야 할 중요한 특성들이 있다

고 보았다. 그 가운데 특별히 중요한 것이 일관성이다. 예컨대 그는 프레게에게 보낸 서신에서 자신의 공리 체계가 이와 같은 성격의 것이어야 함을 다음과 같이 분명하게 지적하고 있다.

[... 공리들은 임의로 주어지며], 만일 그러한 공리들이 그 모든 귀결들과 더불어 서로 모순을 일으키지 않는다면, 그것들은 참이며, 그러한 공리들로 정의된 것들은 [실로] 존재한다. (Hilbert 1899b/1980, p.39)²⁾

이것은 근본적으로 그가 생각하는 공리 체계가, 앞서 지적한 대로, 문제의 체계를 만족시키는 것이라면 무엇이든 상관없는 하나의 뼈대일 뿐이기 때문이다. 만일 그것이 하나의 뼈대로서 어디에선가 모순적이라면, 즉 비일관적이라면, 그것은 발전하는 여러 학문 분야에 적용시 완전히 자의적인 귀결들을 낳게 될 위험이 있다.

그러므로 힐베르트는 이를 막기 위해 우리가 채택하고자 하는 형식 체계 내의 공리들 사이에 그 무모순성, 즉 일관성에 관한 증명이 필수적이라 생각하게 된다. 하지만 그러한 공리 체계의 일관성을 어떻게 증명할 것인가? 힐베르트에게 있어 이러한 문제 자체는 바로 수학에서의 공리 체계의 일관성을 증명하는 문제와 다르지 않다.

이와 같은 문제를 인식한 초기에 힐베르트는 그러한 증명을 상대적 방식으로 해결하고자 하였다. 예컨대 『기하학의 기초』(1899a/2007)에서 제시된 공리 체계의 일관성을 그 자체로 증명하는 대신, 그러한 공리 체계를 만족시킬 수 있는 또 다른 공리 체계, 예컨대 해석학의 공리 체계를 수립하고, 그에 대해 일관성을 증명해, 문제의 기하학의 공리 체계의 일관성을 증명하려 했던 것이다(Hilbert 1900/1996). 하지만 이러한 증명 방식은 그 상대성으로 인해 계속 새로운 공리 체계의 일관성 증명을 요구하게 마련이다. 그러므로 힐베르트는 이미 Hilbert(1905/1967)에서 해

²⁾ 물론 이 때의 힐베르트의 공리관은, 그 자신이 잘 인식하고 있듯(ibid.), ‘하나의 체계를 이루는 공리들이란 이미 그 참이 확립된 명제들로서, 그 자체 이미 서로 모순될 수 없는 것’이라는 프레게의 공리관과는 완전히 순서가 뒤바뀐 것으로, 이를 둘러싼 논란의 해결이 별도로 요구되나, 본 논문의 목적상 일단 여기서는 이러한 문제는 접어 두기로 하자.

석학을 다른 공리 체계로 환원하지 않고 직접적으로 그 일관성을 증명하려는 의도를 피력한 바 있으며, 그러한 증명의 최종적 근거를 러셀식의 논리에서 찾아보려고도 하였다.³⁾ 하지만 러셀식의 논리는 잘 알려진 대로 심각한 집합의 역설에 부딪히는 데다, 당시 브라우어나 바일 등의 직관주의의 영향으로, 그는 Weyl(1921/1998)에 답하는 방식으로 자신의 유명한 유한주의적 관점(finitary point of view)을 드러내게 된다.

주지하는 대로, 힐베르트의 유한주의는 유한한 개수의 기호(sign/stroke symbol)로부터 출발한다. 이것들은 그 자체 직접 경험에 의해 직관적으로만 파악될 뿐, 별도의 대상, 특히 추상적인 어떠한 대상도 지시하지 않는다는 점에서 아무런 의미도 지니지 않는다. 다만 그것들은 형식적 대상으로서 조작되고 비교될 수 있을 뿐이다. 그러므로 예컨대 그와 같은 기호로서의 숫자 '1'과 '11'의 연쇄적 접합(concatenation)은 '11', '1'의 연쇄적 접합과 비교될 수 있고, 전자를 '1+2', 후자를 '2+1'로 표현하기로 약속한 경우, '1+2=2+1'의 무모순성은 별도의 논리적 사고 없이 직관적으로 파악될 수 있게 된다. 따라서 힐베르트는 그러한 기호들의 조작과 비교에서는, 미처 파악할 수 없는 어떠한 모순의 여지도 결코 없다고 보고, 만일 공리화된 각 수학 체계로부터 '1+2≠2+1'과 같은 명백한 모순적 결과를 도출해 낼 수 없음을 보일 수만 있다면, 그로써 곧 해당 체계의 일관성을 독립적으로 보일 수 있다고 생각하였다.

하지만 만일 이것이 가능하다 할지라도, 이처럼 그 일관성이 증명된 수학 체계가 실제 세계에 적용될 수 있는 까닭은 무엇인가? 이러한 질문은, 이미 실제 세계에 적용되어 성과를 거둔 수학들(특히 고전 수학)을 염두에 둘 때, 별도의 의미 없는 기호를 다루는 힐베르트와 같은 이들에게는 매우 본질적인 질문이다. 이에 대해 힐베르트는, 그와 같은 기호 <자체>를 대상으로 하는 수학을 구성할 수 있고, 이 때의 수학이야말로 그와 같은 대상으로 인해 단지 형식적인 수학이 아닌 내용적인(contentual) 수학이 된다고 보았다. 그리하여 그는 것처럼 구성된 수학을 '실재적 수학'(real mathematics), 그를 넘어 상대적으로 좀더 형식화된 수학을 '이

3) 그의 Hilbert & Ackermann(1938/1950, 초판 1928)는 그러한 노력의 한 결과이다. 이러한 흐름에 관해서는 Zach(2003), §1.2 참조.

념적 수학(ideal mathematics)으로 구별하고, 전자로부터 후자의 일관성을 확보해, 방금의 문제에 답할 수 있는 것으로 간주하였다. 그러므로 이러한 답의 구현이야말로, 공리 체계의 일관성 증명 문제를 미래의 수학의 주요한 과제로 제시한 1900년 이후, 그의 유한주의의 관점에서 다시 전개해 나아가야 할 새로운 힐베르트 프로그램이 되었다.

이제 만일 이처럼 새로운 프로그램에 따르게 된다면, 중요한 점은 이념적 수학이 그 자체 내에 실재적 수학을 얼마만큼 충실히 보존할(conserve) 수 있느냐 하는 점이다. 그러므로 예컨대 이념적인 고전 수학이 모든 실재적 수학을 포함한 하나의 체계 내에서 형식화될 수만 있다면, 그 일관성의 증명은 다음과 같은 식으로 진행되게 마련이다: 즉 고전 수학에서 이념적 방법에 따라 증명할 수 있는 모든 실재적 명제가 (유한한 방식의) 참임을 보여 주는 방식이다. 달리 표현하자면, 고전 수학의 이념적인 부분을 유한한 방식의 참으로 검증하는 방식이다. 물론 이에는 테크닉면에서 상당한 어려움이 따르지만, 그의 조력자들에 힘입어 힐베르트는 그 성공을 낙관하였다. 하지만 1930년 이래 괴델은 바로 그와 같은 프로그램에 결정적인 문제가 있음을 지적하게 된다.

그의 불완전성 제1 정리에 따르면, 힐베르트가 생각하는 위와 같은 이상적 수학 체계 T 가 만일 일관적이라면, 그 체계 내에서는 언제나 참이면서도 그 긍정도 부정도 연역해 낼 수 없는 정식(흔히 ' G '로 지칭하는)이 존재해, 결국 그 체계는 결코 연역적으로 완전할 수 없게 된다. 더 직접적으로는, 만일 문제의 T 로부터 유한주의적 관점에서 직관적으로 모순된 정식 $0=1$ 과 같은 것을 어느 경우에도 결코 이끌어 낼 수 없음을 보일 수만 있다면 일관성의 증명은 이루어지는 셈이나, 그의 제2 정리에 따르면, 그 T 자체 내에서는 결코 그러한 증명이 이루어질 수 없게 된다.

괴델의 이와 같은 지적은, 결과적으로, 자신의 철학에 힐베르트식 공리적 방법을 채용하려던 카르납에게도 치명적일 수 있으나, 바로 이 대목에서 괴델의 다음과 같은 해명은 매우 흥미롭고도 아이러니컬하게(힐베르트 이외에) 카르납이 또한 어떻게 그의 발판을 마련해 주었는가를 잘 보여 준다.

이미 증명된 것[즉 1계 논리에 대한 괴델 자신의 완전성 정리]에서 한

걸음 더 나아가 이제는 그것을 공리 체계에 관한 일반 이론으로 확대 적용하는 일에 주목해 보자. 이는 '결정 가능하다'(entscheidungs-definit)[즉 '연역적으로 완전하다']는 개념과 '단형적이다'(monomorph)라는 개념과 관련되어 있다. [...] 우리는 이러한 두 개념 사이에 밀접한 연관성이 있지 않을까 생각할지 모르나, 지금까지 그와 같은 연관성에 관한 일반적 정식은 확립된 바 없다. [...] 여기서 진전된 발전에 따르면, 이제는 아주 특별한 공리 체계들, 즉 그 공리들을 제한된 술어 논리[곧 1계 논리]로 표현할 수 있는 체계들에 있어서만 단형성으로부터 언제나 결정 가능성이 따라 나옴을 보일 수 있을 뿐이다. [...] 또한 만일 고계 논리(확대된 술어 논리)에 대해 완전성의 정리를 증명할 수만 있다면, 완전히 일반적으로 결정 가능성이 단형성으로부터 따라 나옴을 보일 수 있을지 모른다. [...]

하지만 그와 같은 완전성 정리의 확대는 불가능하다는 것이 최근의 나의 증명이다. 즉 『수학의 원리』에 따라 표현 가능하다 할지라도 그것의 논리적 장치로써는 결코 해결할 수 없는 수학적 문제들이 존재하는 것이다. (Gödel 1930/1995, pp.26-9)

여기서 괴델이 말하는 공리 체계의 핵심적 성질들, 즉 결정 가능성, 단형성, 완전성, 그리고 그것들 사이의 일반적인 관계는, 앞서 형식화된 공리 체계에 대한 필요성의 인식 이후 바로 Carnap(1928/2000)에서 본격적으로 연구된 것으로, 괴델은 바로 카르납의 그러한 결과를 이용하면서도 역설적으로 그 결과를 겨냥해 자신의 증명을 부각시키고 있는 셈이다.⁴⁾ 그러므로, 골드파브의 지적대로(Goldfarb 2005, p.186), 괴델은 바로 카르납으로부터 자신의 탐구에 필요한 개념을 배우고 자신의 문제를 설정할 수 있게 된 것이나, 바로 그로부터 자라난 새로운 결과가 카르납이 생각했던 힐베르트식의 공리 체계에 심각한 충격을 가하게 된 것으로 보는 것이 합당할 것이다.

4) Reck(2007, pp.191-2)에 따르면, 괴델은 비엔나 대학교의 학생 시절부터 카르납과 직접적인 접촉을 갖고, 그의 연구 내용도 미리 알고 있었던 것으로 알려져 있다. 여기서 '단형성'이란 또한 '절대성'(categoricity)이라 칭하기도 하며, 어떤 공리 체계에 대한 일정한 해석 모델이 그 형식상 모두 동형이어서 형식적으로 오직 하나로 규정되는 경우를 말한다. 카르납에 있어 공리 체계에 관한 이와 같은 여러 성질들에 관한 좀 더 상세한 논의를 위해서는 예컨대 전영삼(2008) 참조.

2. 괴델 이후 힐베르트주의자들에게서의 체계 상대성 문제

괴델 이후 힐베르트 자신은 개인적으로 분명하게 그러한 충격에 대응하는 모습을 보여 주지 않았다.⁵⁾ 하지만 그 이전의 힐베르트의 작업을 실마리로, 여러 사람들이 괴델 이후 그의 작업이 어떻게 변모해야 될지 계속 탐구하고 있는 것이 오늘날의 상황이다. 그러므로 여기서 ‘괴델 이후의 힐베르트’라고 할 때, 이는 단지 힐베르트 개인을 지칭하는 것이 아니라, 그 자신을 포함해 그의 작업을 이어받은 일련의 사람들을 통칭하는 것으로 이해해야 할 것이다. 이런 의미로 이하에서는 이들을 ‘괴델 이후의 힐베르트주의자들’이라 부르기로 한다.

괴델 이후 힐베르트주의자들이 힐베르트 프로그램을 위해 전개한 활동은 여러 가지이다.⁶⁾ 따라서 유일한 대응은 아니나, 그럼에도 불구하고 일관성 증명을 절대적인 것에서 상대적인 것으로 전환하는 작업은 괴델 이후의 주요한 작업으로 평가받고 있다. 힐베르트의 유한주의의 원래 취지를 살리면서도 괴델의 충격을 온전히 수용할 수 있는 작업으로 여겨지고 있기 때문이다.⁷⁾ 그러므로 이것이 의미하는 바가 무엇이고, 이로써 얻게 되는 바가 무엇인가를 고찰하는 일은 괴델 이후의 힐베르트를 이해하는데 관건이 될 수 있다. 나는 여기서 이러한 방향에 한정해 괴델 이후 힐베르트의 문제를 논하기로 한다.

우선 이와 같은 일관성 증명의 상대화가 정확히 무엇을 의미하는가는 무엇보다도 그러한 작업을 선도한 겐첸의 증명에서 잘 볼 수 있다(Gentzen

5) 예컨대 Hilbert & Bernays(1934, “Zur Einführung”)에서 힐베르트는 괴델의 불완전성 정리가 자신의 원래 프로그램을 무너뜨릴 것이라 인정하지 않았다. 또한 괴델의 불완전성 정리에 대한 힐베르트의 개인적 반응은 격노였던 것으로 알려져 있다(Potter 2000, p.244).

6) 예컨대 Detlefsen(1986)에서는, 수학적 도구주의 관점에서, 어떤 이론 내에서 증명할 수 없는 일관성에 관한 정식을 괴델과는 다른 방식으로 형식화함으로써 괴델의 제2 정리를 피해 가는 전략을 쓰고 있다.

7) 예컨대 Sieg(1988, p.343) 참조.

1936-7/1969).⁸⁾ 그의 일관성 증명의 기본 발상은 다음과 같다. 어떤 이론에 대한 일관성 증명은, 그 이론에 대해 생각할 수 있는 모든 수론적(數論的) 증명들을 고려해, 그 각각의 개별 증명이 아무런 모순이 없다는 ‘올바른’ 결과를 낳음을 보여 줌으로써 이루어질 수 있다. 그런데 어떤 증명의 올바름은 그 안에 포함된 좀더 단순한 다른 증명의 올바름에 의존한다. 그러므로 그는, 어떤 증명의 올바름이 다른 증명의 올바름에 의존하는 경우, 후자의 증명들이 전자의 증명들에 앞설 수 있도록 증명들을 선형적 순서로 배열할 것을 제안한다. 이 때 이러한 증명들의 배열 순서는 구체적으로는 각 증명과 연관된 이른바 ‘초한적 서수’(transfinite ordinal number)들의 순서에 대응된다. 그리고 그 증명 각각의 올바름을 증명하는 데에는 초한적 귀납(transfinite induction)의 규칙이 사용된다.

여기서 ‘초한적인’ 것들이 문제되는 까닭은 어떤 하나의 증명이 그 자체 무한히 많은 더 단순한 증명들에 의존하기 때문이다. 초한적 서수란, 처음에 무한한 자연수의 계열을 시작으로, 그러한 계열 뒤에 오는 새로운 수 ω 를 정하고, 유사한 방식으로 계속 무한한 계열을 순서적으로 누가(累加)해 구성되는 수들을 말한다. 초한적 귀납의 규칙이란 단순히 우리가 익히 알고 있는 완전(수학적) 귀납의 규칙을 자연수로부터 바로 그러한 초한적 서수로 확대한 것에 지나지 않는다. 그러나 이와 같은 규칙이야말로 일관성 증명에 있어 괴델의 제2 정리에 부응하는 것으로, 예컨대 해석학의 기법을 이용하지 않는 자연수에 대한 이론으로서의 이른바 ‘기초(자연)수론’(elementary number theory)의 경우, 괴델의 정리에 따르면 그 일관성의 증명은 기초 수론 자체의 증명 기법만으로는 이루어질 수 없는데, 바로 그러한 기법을 넘어설 수 있는 추론 방식이 초한적 귀납법인 것이다.

그러므로 이상의 관점에서 겐첸은 “‘절대적’ 일관성 증명은 결코 있을 수 없다”(ibid., p.228)고 단언한다. 그러나 이러한 증명들의 순서적 배열에서 그 출발점은 무엇이며, 그것은 어디로 나아가는 것인가. 이에 관해 겐첸은 다음과 같이 말하고 있다.

8) 하지만 겐첸과 유사한 발상은 또한 괴델에게서도 독립적으로 발견된다 (Gödel 1933/1986 참조).

만일 일관성 증명이 이렇게 수행된다면, 물론 어떤 추리 형식들이 그 증명을 위해 사용되어야만 한다. <그러한> 추리들의 올바름은 처음부터 가정되어야만(presupposed) 하는데, 만일 그렇지 않다면 전체 증명이 당연히 순환적이 되어 버리기 때문이다. [... 이 때] 어떤 종류의 추리를 올바른 것으로 가정해야 하는가는 [분명하다]: 그 추리들은 <구성주의적>(constructivist) 관점과 양립 가능해야 한다. 구성주의적 관점의 신뢰성은 가정될 뿐으로 의문시되지 않는다. 그렇다면 이제 목표는 구성주의적 추리를 수단으로 [예컨대 실무한(actual infinity)과 같이 미리 정해진 어떤 전체(totality)의 존재를 주장하는 고전 수학적 인] 실현론적(actualist/an sich) 해석의 일관성을 증명하는 일이다. (ibid., 강조 원문)

요컨대 그는 크로네커(Kronecker), 브라우어, 바일 등이 주장하는 대로 모순을 낳지 않는 구성주의적 추리 방식을 일관성 증명의 안전한 지점으로 선택하고, 그로부터 고전 수학적 이론 체계의 일관성을 증명해 가려는 전략을 세운 셈이다. 그리하여 그는 Gentzen (1936/1969)에서 실제 이와 같은 방식으로 기초 수론에 대한 일관성 증명을 제시하고 있다. 즉 기초 수론의 일관성을 증명하는 데 필요한 만큼 확대된, ω 의 상한(上限)으로서의 수 ε_0 에 이르기까지 초한적 귀납법을 적용해 그 증명을 이루어 낸 것이다.

그런데 이상의 과정을 역의 방향에서 다시 말한다면, 그 증명의 과정은 일종의 ‘환원적’ 과정이라 할 수 있다. 겐첸 자신의 말대로, 이 경우 “일관성의 증명이란 단지 어떤 추리 형식들의 올바름을 다른 추리 형식들의 올바름으로 <환원>(reduce)”(ibid., p.138, 강조 원문)하는 일에 다름 아니기 때문이다. 물론 이 때 그 환원의 최종 지점이 어떤 절대적 고정점이라 생각해서는 안 된다. 그러한 “일관성의 증명에서 우리는 단지 우리가 그 일관성을 증명하고자 하는 이론이 지닌 추리 형식들보다 상당한 정도로 <한층 더 안전한>(more secure) 것으로 여기는 어떤 추리 형식들만을 이용”(ibid., 강조 원문)하는 것뿐이다. 이것이, 앞서의 인용문에서 ‘추리의 올바름이 가정되어야 한다’고 했을 때, 그 ‘가정’의 진정한 의미이다. 그러므로 이제 겐첸의 일관성 증명에서 그것이 ‘상대적’이라고 하는 의미는, 그 일관성 증명을 행하고자 하는 이론 체계의 일관성이 결국 또 다른 이론 체계의 일관성에 의존하고(좀더 정확히는 전자의 추리 형식들의 올

바름이 후자의 추리 형식들의 올바름에 의존하고), 나아가 순환성을 피하기 위해 그 출발점이 되는(또는 우리가 그 일관성을 증명하고자 하는 이론 이전의) 이론 체계의 추리 형식들의 올바름을 상대적으로 더 안전한 것으로 가정한다는 데 놓여 있다.

이러한 점은, 겐첸 이후 쉬테(K. Schütte), 다케우티(G. Takeuti) 등으로 이어지는, 일련의 상대화된 힐베르트 프로그램(Hilbert's Program relativised)의 일반적 패턴을 요약·발전시켜 제시한 페퍼만의 다음과 같은 정식으로 좀더 상세히 보여 줄 수 있다.

수학의 어떤 일부 $\mathcal{F}_1$ 이 기초적 내지 개념적인 틀(foundational or conceptual framework) $\mathcal{F}_1$ 에 의해 정당화된 형식 체계 T_1 내에서 표현된다고 해 보자. 이 때 T_1 은, 그와 같은 틀로서 좀더 기초적인(more elementary) 또 다른 틀 $\mathcal{F}_2$ 에 의해 정당화된 체계 T_2 로 증명 이론적으로 환원된다. (Feferman 1988, p.364)

이 때 $\mathcal{F}_1$ 과 $\mathcal{F}_2$ 는 각기 다음과 같은 성격의 것으로 비교 예시할 수 있다 (ibid., p.367).

$\mathcal{F}_1$	$\mathcal{F}_2$
무한(infinitary)	유한(finitary)
비가부번적으로 무한 (uncountably infinitary)	가부번적으로 무한 (countably infinitary)
비가술적(impredicative)	가술적(predicative)
포섭적: “위로부터 귀납적” (circumscriptive: “inductive from above”)	발생적: “아래로부터 귀납적” (genetic: “inductive from below”)
비구성적(nonconstructive)	구성적(constructive)

여기서 말하는 $\mathcal{F}_1$ 과 $\mathcal{F}_2$ 는 환원이 이루어지는 구체적 맥락에서는 각기 T_1 과 T_2 가 표현되는 언어 $\mathcal{L}_1$ 과 $\mathcal{L}_2$ 를 말하며, 이러한 언어들의 공통 부분, 즉 $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ 는 원초적 회귀 산수(primitive recursive arithmetic)를 나타낼 수 있는 언어 $\mathcal{L}_{PRA}$ 를 포함하는 것으로 전제한다. 이러할 때, T_1

을 T_2 로 증명 이론적으로 환원한다는 것은 T_1 내에서 어떤 정식에 대한 모든 증명 p 를 T_2 내에서 동일 정식에 대한 증명 $f(p)$ 로 변형할 수 있는 효과적 방법, 즉 함수 f 가 존재하고, 이러한 증명이 모두 T_2 에서 이루어질 수 있음을 뜻한다. 만일 이러한 환원이 가능하다면, 이를 간단히 ' $T_1 \leq T_2$ '로 나타낸다. 그러므로 예컨대 페아노의 산수를 이론 ' T '라 하고, 그에 대응하는 이론으로서 헤이팅(Heyting)의 직관주의적 산수를 ' $T^{(i)}$ '라 하면, Gödel (1933/1986)에서 보여 주듯, $T \leq T^{(i)}$ 임을 보여 줄 수 있는 것이다. 이 경우, T 는 비구성적 언어 내에서 정당화되고, $T^{(i)}$ 는 구성적 언어 내에서 정당화된 이론이다. (Feferman 1988, pp.368, 377 참조)

따라서, 페퍼만의 이러한 해명에 따르면, 앞서 겐첸이 말하는 바 '구성주의적 추리를 수단으로 실현론적 해석의 일관성을 증명하는 일'이란 결국 후자의 언어에 의해 정당화된 하나의 이론(예컨대 페아노의 산수)을 전자의 언어에 의해 정당화된 또 다른 하나의 이론(예컨대 헤이팅의 산수)으로 환원함을 뜻하는 것으로 볼 수 있다.

이와 같은 환원의 작업은 어느 면, 앞서 언급한 대로 힐베르트 초기에 이루어졌던, 기하학의 체계를 해석학의 체계로 환원해 일관성을 증명하려 했던 시도와 유사해 보일지 모른다. 하지만 이것은 후자의 공리 체계가 전자의 그것을 만족시킴을 전제로 이루어지는 것이므로, 전자의 대상들을 후자의 대상으로 사상(mapping)시킴으로써 이루어지는 환원일 뿐이다. 겐첸 이후의 환원의 초점은 '증명이 이루어지는 논리적 추론'의 환원이다 (Gentzen 1936/1969, p.136). 더군다나 힐베르트 초기의 그 환원은 해석학 체계가 '더 안전하다'는 것을 전제로 하는 것도 아니다. 물론 이후 힐베르트가 그 '안전함'을 고려하여 유한주의로 나아갔을 때, 그는 이 점을 중시했음에 분명하다. 하지만 그의 일관성 증명의 방식은, 앞서 지적한 대로, 고전 수학에서 이념적 방법에 따라 증명할 수 있는 모든 실재적 명제가 (유한한 방식의) 참임을 보여 주는 방식이다. 달리 말해 이는 고전 수학의 어떤 체계가 지닌 공리들로부터 유한주의적 명제들의 참을 증명해 내려는 것으로, 만일 이렇게만 될 수 있다면 결국 전자는 그 안에 유한주의적 수학을 포함하며, 후자는 그 방식대로 형식화될 수 있으나, 이는 괴델의 제2 정리에 의해 그 자체 일관성을 증명할 수 없게 된다.⁹⁾ 그

러므로 앞서 쾨텐과 관련해 해명한 대로 괴델의 이러한 정리에 부응하면서, 동시에 유한주의적 관점에서 추구하는 안전함을 유지할 수 있는 방법으로 제시된 것이 바로 상대적 일관성 증명의 방법인 셈이다.

3. 괴델 이후 카르납에게서의 체계 상대성 문제

힐베르트와는 달리, 카르납은 괴델의 충격에 상당히 심각하게 고민한 것으로 알려져 있다. 1930년대 무렵을 회상하면서 쓴 그의 다음과 같은 대목은 이를 잘 보여 준다.

<이러한 문제들>에 대해 수년 간 생각한 끝에, 1931년 1월 몸이 아픈 채 어느 잠 못 드는 밤, 언어의 구조에 대한 전체 이론과 그것을 철학에 적용해 볼 수 있을 법하다는 생각이 마치 하나의 환영(vision)처럼 내 머릿속에 떠올랐다. 다음 날, 열 때문에 여전히 침대에 누운 채 나는 “메타 논리 시론(試論)”(Attempt at a Metalogic)이라는 제목하에 44쪽으로 내 아이디어를 적어 놓았다. 이 속기록(速記錄)이 이후 나의 책 『언어의 논리적 구문론』의 첫 버전이었다. (Carnap 1936, p.53, 강조 논자)

여기서 말하는 “이러한 문제들”에 관해 카르납 자신은 위의 인용문 바로 전 단락에서, 가장 직접적으로, 모든 형식 체계가 불완전하며 불완전할 수밖에 없다는 괴델의 발표 결과를 지적하고 있다. 그러므로 만일 이러한 구절들만에 따르면, 그 동안 그에게 가장 직접적으로 영향을 미친 것은 괴델의 제1 정리이며, 단순히 이를 극복하기 위한 아이디어가 위의 시기에 획기적으로 카르납에게 떠올랐고, 그것이 그대로 『언어의 논리적 구문론』(1934/1937, 이하 ‘『구문론』’으로 약칭)으로 이어진 것으로 생각할지 모른다. 하지만 어워드와 캐러스가 해당 속기록을 중심으로 그 역사적 과정을 따라 연구한 바에 따르면(Awodey & Carus 2007), 그 첫 버전

9) 괴델은 Gödel(1958)에서 이처럼 형식화된 유한주의적 수학은 결국 페아노의 산수를 넘어서지 못함을 보이고 있다. 그런데 페아노의 산수 체계는 그 자체로 일관성 증명이 이루어질 수 없다.

과 이후의 『구문론』 사이에는 상당한 차이가 존재하는 것으로 드러나고 있다. 이 과정에 대한 고찰은 카르납에 있어 괴델 이후 체계 상대성의 아이디어가 어떻게 싹트게 됐는가를 결정적으로 보여 줄 수 있는 것으로 여겨지므로, 이로부터 시작해 보기로 하자.

어위디와 캐러스의 연구에 따르면, 위에서 말하는 “첫 버전”의 핵심은, 논리의 법칙들이 사고(thought)의 법칙이 아니라 언어의 법칙이라는 비트겐슈타인의 견해를 받아들이면서도, 어느 특정 규칙들의 체계에 매여 있는 그의 표상적 언어 이론에서 벗어나 언어의 구조 자체를 연구하고자 하는 ‘메타 수학적 관점’을 취할 수 있게 되었다는 점이다. 이것은, 앞서 제1절에서 논한 대로 비트겐슈타인과는 달리 카르납이 이미 힐베르트의 형식화된 공리적 방법의 의의에 익숙하고, 어위디와 캐러스의 지적대로 (ibid., p.33) (이번에는 카르납 쪽에서 다시 역설적이게도) 그러한 방법을 적절히 활용하고 있는 괴델의 영향을 받은 것으로 보인다.¹⁰⁾

물론 이 무렵 이미 카르납은 괴델의 제1 정리에 대해 파악하고 있었으므로, 그는 “첫 버전” 이후 대략 1931년 후반과 32년 전반기에 걸쳐 실제로 『구문론』의 초고¹¹⁾를 쓰면서 메타 수학적 관점에서 이른바 ‘분석성’(analyticity)의 개념을 규정짓고자 노력하였다. 괴델의 제1 정리가 수학적 참과 관련해 보여 준 바는 수학적 참이란 단순히 형식화된 공리 체계에 의한 증명 가능성은 아니라는 것이다. 그렇게 증명되지 않으면서도 참인 수학적 명제가 필히 존재할 수 있기 때문이다. 그러므로 카르납은, 그러한 수학적 참을 포함해, 증명 가능성을 대신할 만한 좀더 강력한 개념으로서 ‘분석성’을 제시한 것이다.

스스로의 슬회대로(Carnap 1963, p.48), 카르납은 순수하게 수학으로부터 출발한 것이 아니라, 물리학과 같은 자연 과학으로부터 출발해 수학에 관심을 갖게 된 사람이다. 그러므로 그는 수학적인 추론을 그 자체로 독립

10) 이 대목에서 어위디와 캐러스는 타르스키의 영향에 대해서도 지적하고 있으나, 문제가 되고 있는 지금의 시기에서 왜 그러한지는 명확히 제시되어 있지 않다.

11) 이때에는 “메타 논리”(Metalogik)라는 제목이 붙어 있었다고 하나, 지금은 그 목차 외에는 남아 있지 않다고 한다.

시켜 다루기보다는 좀더 폭넓게 자연 과학적인 경험 명제까지를 포함할 수 있는 언어 체계 내에서 그것을 다루고자 하였다. 다만 그는 수학적인 참이나 논리적인 참 모두 전적으로 경험적 내용 없는 순수 형식적인 것으로 취급할 수 있다고 생각하였다. 그러므로 그는 위와 같은 언어 체계 내에서 주어지는 분석성의 기준이야말로 어떤 명제가 오로지 해당 체계 내의 형식적 규칙에 의해서만 성립할 수 있는 기준을 제시할 수 있는 것으로 보았다. 즉 앞서 제1절에서 지적한 대로 어떤 수학 체계 T 내에서 그 자체 참이면서도 그 긍정도 부정도 연역해 낼 수 없는 G 와 같은 수학적 명제가 존재하는 경우, 그것을 해당 체계의 공리들로부터 연역해 낼 수 없다 할지라도 해당 추리의 규칙들에 의해 규정할 수는 있다는 점에서 그것은 분석적일 수 있다는 것이다(Carnap 1934/1937, p.222 참조).¹²⁾

하지만 다시 한번 역설적으로, 괴델은 여기서 다시금 카르납의 사고에 커다란 영향을 미치게 된다. 이 무렵 괴델과 카르납 양자의 서신 교환을 통해 드러나듯(Gödel 1932/2003), 『구문론』 초고에서 카르납은, 대상 수학이 표현되는 대상 언어와, 대상 수학의 수학적 참을 규정해 줄 메타 언어를 동일하게 하나의 언어로 접근해(예컨대 괴델식의 산술화 방법으로) 분석성의 기준을 제시하려고 하였다. 하지만 서신에서 괴델이 지적한 대로, 그러한 식으로는 결국 심각한 문제에 부딪치게 된다. 예컨대 어떤 속성을 나타내는 술어 변항에 관해 양화된 제2계의 수학적 명제 $(\forall X)f(X)$ 에 대해 분석성의 기준을 제시한다고 해 보자.¹³⁾ 이를 위해 카르납은 예컨대 그 단순한 형태 $X(0)$ 의 정식 $f(X)$ 에 대해 다음과 같은 식

12) 물론 카르납의 이와 같은 '분석성' 개념은, 방금 언급한 대로, 근원적으로 수학적 참이나 논리적 참을 경험적 내용 없는 순수히 형식적인 것으로 취급하려는 그의 의도에서 나온 것으로, 이러한 개념이 안고 있는 문제에 관해서는 본 논문의 목적상 여기서는 논하지 않기로 한다. 카르납의 '분석성' 개념 자체의 전개 과정과 그에 따른 문제점들에 관해서는 예컨대 Awodey(2007) 참조. Friedman(1988/1999)에서는 지금의 경우 카르납이 괴델의 제1 정리의 충격을 충분히 인식하고 제대로 반영하지 못하고 있다고 비판하고 있으나, 오히려 Tennant(2008, §2)에서는 그러한 프리드먼의 지적에 문제가 있다고 비판한다. 나는 일단 테넌트의 입장에 동의하며, 체계 상대성과 관련해 카르납의 입장을 해명하는 데 치중하기로 한다.

13) 이하의 예시는 Awodey & Carus (2007, p.37)에서의 해명에 따른 것이다.

의 기준을 제시하였다.

($(\forall X)X(0)$)은 분석적이다 =df 모든 술어 상항(predicate constant)
 $A(x)$ 에 대해 $A(0)$ 가 분석적이다.

즉 ($(\forall X)X(0)$)의 분석성을 규정하기 위해 술어 변항 X 에 대입할 수 있는 <모든> 술어 상항 $A(x)$ 가 분석적임을 이용한 것이다. 하지만 이 경우 문제의 술어 상항에 별도의 제약이 없으므로, 그러한 X 에 심지어 우리가 정의하고자 하는 술어인 ($(\forall X)X(x)$)가 대치되어 들어갈 수도 있고, 이렇게 된다면 결국 순환에 빠지게 된다. 물론 이러한 순환성을 피하기 위해 어쩌면 그 대입 사례로서 좀더 낮은 계수(order)의 술어만으로 한정을 지을 수도 있을지 모르나, 만일 그렇게 된다면, 이는 분기된 유형 이론(ramified type theory)과 같은 체계에 대해서만 해당 정의를 제공할 수 있을 뿐, 결국 고전 수학을 다루는 데에는 부적합하게 된다.¹⁴⁾

그러므로 이에 대해 고민하던 카르납은 마침내 다음과 같은 획기적 아이디어에 이르게 된다. 만일 방금의 문제가 대상 언어와 메타 언어를 하나의 언어로 접근해 나타난 것이라면, 필경 대상 언어와 메타 언어를 엄격히 구별하고, 후자와 관련해 분석성의 기준을 제시하지 않을 수 없을 것이다. 예컨대 ($(\forall X)f(X)$)와 같이 우리가 분석성의 기준을 제시하고자 하는 수학적 명제가 표현되는 대상 언어 L 의 한 술어에 대해 그에 대입할 수 있는 ‘모든 값’에 대한 규정을 L 보다 한층 더 강한 메타 언어 L' 에서 행하는 것이다. 그러나 이처럼 대상 언어와 메타 언어를 엄격히 구별해 접근한다면, 위와 같은 문제가 해결됨과 동시에 다음과 같은 의문이 발생하게 된다: 그렇다면 지금의 상황에서 문제의 메타 언어를 채택하는 궁극적인 이유는 무엇인가? 만일 메타 언어의 차원에서 그 ‘값’에 아무런 제약 없이 그 모든 것으로 열어 놓고자 한다면, 그 까닭은 무엇인가? 반대로 만일 그에 일정한 제약을 두고자 한다면, 또한 그 까닭은 무엇인가? 어느 경우에건 순환성의 문제는 발생하지 않으므로, 이 경우 어느 쪽의

¹⁴⁾ 분기된 유형 이론과 고전 수학의 이와 같은 관계에 관해서는 예컨대 Copi (1979, Appendix C) 참조.

메타 언어를 택하든 그것은 결국 프래그마틱한 이유(즉 그러한 언어 선택이 고전 수학의 내용을 다루는 데 적합한지 아닌지와 같은 것) 외에는 아무 것도 없는 게 아닐까? 만일 이러한 생각이 맞다면, 어떤 대상 언어 L 에서의 분석성을 규정해 주는 것은 그것의 배후에 놓인 메타 언어 L' 이며, 그와 같은 분석성은 프래그마틱하게 선택될 뿐인 메타 언어에 '상대적인' 것이 되어 버린다.

어워드와 캐러스의 연구에 따르면(Awodey & Carus 2007, p.39), 이후 카르납은 완전히 "다른 사람"(a changed man)이 되었다고 한다. 그리하여 『구문론』 출간 이전에 Carnap (1932) 같은 데서도 이미, 비록 '프로토콜 문장'의 성격 문제에 관한 것이긴 하나, 다음과 같이 지적하는 것을 볼 수 있다.

내 생각에 이러한 문제는 서로 모순되는 두 관념 사이의 문제가 아니라, <과학의 언어를 구성하는 서로 다른 두 방법 사이의 문제>이다 [...]. (p.215, 강조 원문)

[... 프로토콜 문장의 성격에 관한] 서로 다른 답들은 서로 모순적이라 생각하지 않는다. 그것들은 [그와 같은 성격] 규정을 [이러저러하게 하면] 어떻겠느냐는 나름의 제안(Vorschläge zu Festsetzungen/proposals for stipulations)으로 보아야만 한다. <이 때의 과제는 것처럼 서로 다른 가능한 규정들을 그 귀결들에 관해 조사하고 그 목적에 비춰 그것들의 유용성을 평가하는 데 놓여 있다>(die Aufgabe besteht darin, diese verschiedenen möglichen Festsetzungen auf ihre Folgerungen hin zu untersuchen und ihre Zweckmäßigkeit zu prüfen). (p.216, 강조 논자)

사실 여기서 말하는 모든 것은 프로토콜 문장의 성격 규명에 관한 것 대신에 과학의 언어(또는 더 좁게 수학의 언어) 선택에 관한 『구문론』에서의 다음과 같은 구절과 그대로 연결될 수 있는 것들이다.

[...] 언어는, 그 수학적 형태로 볼 때, 표출된 관점 어느 것에 대한 선호에 따라서든 구성될 수 있다. 그러므로 [여기서는] 아무런 정당성의 문제가 발생하지 않는다. 오직 이러저러한 선택에 따라 나아가게 될 구문론적 귀결의 문제만이 남을 뿐이다. 여기에는 무모순의 문제도 또

함된다. (Carnap 1934/1937, p.xv)

그리하여 이와 같은 정신에 따라 카르납은 결국 “<금지 규정을 세우는 것이 우리의 일이 아니라, 규약에 이르는 것이 우리의 일이다>”(ibid., p.51), “<논리에는 아무런 모럴도 없다.> 모든 사람은 자신이 원하는 대로 자유롭게 자신의 논리, 즉 자신의 언어 형식을 세울 수 있다”(ibid., p.52, 강조는 모두 원문)는 그의 유명한 ‘관용의 원리’(Principle of Tolerance)에 이르게 된다.

4. 일관성 증명에의 ‘강박’?

지금까지 우리는 괴델 이후 힐베르트주의자들과 카르납 양자에 있어 체계 상대성의 문제를 각기 분리해 논의해 왔다. 이제는 양자를 서로 비교해 논의해 보기로 하자. 사실, 아래에서도 보게 되듯, 지금까지 이 가운데 어느 한편에 서서 다른 쪽을 비판하는 경우들은 흔히 볼 수 있으나, 위 양자가 말하는 ‘체계 상대성’의 차이를 비교해 드러내고, 이에 근거해 그와 같은 비판들에 있을 수 있는 오해를 해명하는 작업은 보기 쉽지 않다.¹⁵⁾ 이하에서 이러한 작업을 행해 보기로 한다.

우선, 앞의 제3절에서 카르납이 ‘관용의 원리’에 이르기까지의 과정에 주목해 보기로 하자. 이에 주목해 볼 때, 괴델 이후 힐베르트주의자들과 카르납 양자에 있어 서로 대응되는 것들이 무엇인가를 좀더 분명히 지적할 수 있다. 『구문론』에서 카르납은 자신의 체계 상대성을 보여 줄 수 있는 구체적인 예시로 언어 I과 II를 제시하고 있다. 하지만 이것들은 단지 예시로만 끝나지 않고, 좀더 중요하게는, 그 각각이 수학에 관한 직관 주의적 관점과 고전 수학적 관점을 대변하고 있다.¹⁶⁾ 이 때 주의할 점은,

15) 카르납의 기본적인 사유 방식과 유사하게, 나는 여기서도 이러한 오해가 해소될 때 오히려 불필요한 논란이 더 줄어들거나, (바라건대) 완전히 사라지리라 생각한다.

16) 여기서 말하는 ‘직관주의’는 달리 구성주의나 유한주의를 포괄하는 통칭이

카르납의 언어 I과 II 자체는 메타 언어가 아니라 모두 대상 언어로 제시된 것이라는 점이다. 그러므로, 이 점에 주목한다면, 앞서 제2절에서 폐퍼만과 관련해 제시된 언어 $\mathcal{L}_1$ 과 $\mathcal{L}_2$ 는 각기 카르납의 언어 II와 I에 대응시킬 수 있고, 개념적 틀 $\mathcal{F}_1$ 과 $\mathcal{F}_2$ 는 각기 고전 수학적 관점과 직관주의적 관점을 반영하는 서로 다른 메타 언어(이는, 앞서 제3절에서의 카르납식 표기법을 쓰자면, 각기 ' L_{II} '와 ' L_I '라 해 볼 수 있다)에 대응시킬 수 있다.

따라서 만일 이와 같은 대응 관계에 기반을 둔다면, 앞서 말한 괴델 이후 힐베르트주의자들의 작업을 카르납식으로 바꿔 표현할 경우, 그것은 메타 언어 L_{II} '와 L_I '의 관점에 따라 각기 정당하게 구성된 대상 언어 II와 I로 표현된 이론 T_{II} 를 이론 T_I 으로 환원하는 작업이라 볼 수 있을 것이다. 그러므로 만일 우리가 이와 같은 <환원 작업을 인정한다면>, 그 작업이 <성공하기 전까지는> 왜 우리가 메타 언어 L_I '가 아닌 또 다른 메타 언어 L_{II} '를 택할 수 있는지 그 이유를 알기 어렵다. 물론 이 때의 환원 작업은 겐첸이나 폐퍼만식의 일관성 증명 과정을 말한다. 그러므로 여기서는 예컨대 메타 언어 L_{II} '를 선택해 고전 수학의 내용을 인정하고 그것을 다루기 위해서는 일관성의 증명이 필수적이다.¹⁷⁾

하지만, 앞서 제3절에서 말한 대로, L_{II} '와 L_I ' 중 어느 것을 선택하느냐는 카르납에 있어 프래그마틱한 이유 이외에는 완전히 자유롭다. 따라서 그의 입장에서는 일관성의 증명은, 물론 어떤 공리 체계의 한 체계적 특성을 밝히는 데에 중요할 수 있으나, 메타 언어로 구현된, 수학에

다. 물론, 카르납 자신의 주의대로(Carnap 1934/1937, p.11), 두 언어 각각이 여기서 말하는 두 관점과 정확히 대응되는 것은 아니나, 본 논문에서는 그러한 정확성 여부는 중요치 않다. 카르납은, 이 경우, 오히려 직관주의자들이 자신의 관점이 무엇인가를 정확히 제시하지 않는 것에 관해 불만을 토로하고 있다(ibid., p.46).

¹⁷⁾ 물론, 이 경우, 반대로 괴델 이후 힐베르트주의자들이 일관성 증명이 필연적이라 생각했기 때문에 지금과 같은 체계 상대성을 보이게 되었다고 말할 수도 있을 것이다. 하지만 아래에서는 그들이 생각하는 체계 상대성이 일관성 증명에의 필연성을 낳는 또 다른 이유를 제시할 것이다. 어느 경우든, 그들에게 있어 일관성 증명의 필연성과 그들 나름의 체계 상대성이 불가분의 관계에 있음은 분명하다.

대한 어떤 관점(이는 또한 문제의 수학에 대한 어떤 철학적 주장이라고 할 수도 있을 것이다)을 <정당하게> 받아들이는 데 <불가피하게> 필요한 것은 아니다. 앞서 제3절에서의 Carnap (1934/1937, p.xv)의 인용문 말미에 언급되어 있듯, 그는 “무모순의 문제”가 바로 이러한 관점에서 바라볼 수 있는 것이라 지적하고 있다. 사실, 일관성 증명의 문제와 관련해, 카르납은 괴델의 제2 정리를 잘 알고 있으면서도 그 심각성에 대해서는 제1 정리에 대해서만큼 고민하고 있지 않았다. 예컨대 그의 다음과 같은 구절은 이 점을 잘 반영한다.

[… 언어] <II의 무모순성은 II를 처리할 수 있는 수단으로는 증명할 수 없다.> [… 이것은] II의 무모순성에 대한 증명이 전혀 가능하지 않을 것임을 의미하지는 않는다. [… 이것이] 의미하는 바는 단지 그러한 증명은 II보다 한층 더 풍부한 어떤 언어로 정식화된 구문론의 자원(資源)으로만 가능하다는 것뿐이다. (ibid., p.133, 강조 원문)

그러므로 일관성과 관련해 언어 I과 II 중 어느 것을 선택하느냐 하는 문제 역시, 언어 II를 택한다면 고전 수학의 풍부한 자원을 이용할 수 있는 데 반해, 일관성에 있어 더 안전하기를 원한다면 언어 I이 더 낫다는 정도의 편의성의 문제일 뿐이다(Carnap 1939, p.50f.; Carnap 1963, p.49; Ricketts 2007, p.207 참조).¹⁸⁾

만일 카르납의 이와 같은 관점에 선다면, 이제 괴델 이후 힐베르트주의자들의, 일관성 증명에 대한 열의는 일종의 ‘강박’이 될 수 있다. 다른 관

18) 괴델이나 그에 호의적인 프리드먼, 포터 등(Gödel 1953/9/1995; Friedman 1999; Potter 2000, p.269)은, 괴델의 제2 정리에 따라, 카르납의 구문론 체계에서 그 규칙들을 정당화하기 위해서는 그것들만으로는 결코 포착할 수 없는 한층 더 강한 수학이 필요하고, 이로써 카르납의 구문론은 자가당착에 이르거나 아니면 무한 소급에 빠질 것이라 비판하고 있다. 물론 대상 언어 체계 자체에 관해서라면, 바로 위의 인용문에서 암시하고 있는 대로 카르납 자신 이를 인정할 것이다. 하지만 이미 자유롭게(또는 편의에 따라) <메타적 차원>에서 언어를 선택한 상황에서라면, 그 인용문에서의 지적대로, 그것이 대상으로 하는 대상 언어 체계의 일관성을 증명하는 일은 문제가 되지 않을 것이다.

점에서 보았을 때 꼭 필요하지 않을 수도 있는데, 그럼에도 불구하고 그 어떤 것이 '꼭 필요하다'고 고집할 때, 그것을 일종의 '강박'이라 볼 수 있기 때문이다.

하지만 이 지점에서, 카르납의 위와 같은 관점이 일관성의 증명 없이는 근본적으로 성립될 수 없는 것이라는 Gödel (1953/9/1995)에서의 비판은 괴델 이후 힐베르트주의자들의 일관성 증명에의 열의가 단지 강박이 아니라는 중요한 강변이 될 수 있을지 모른다. 괴델 자신은 머뭇거린 끝에 끝내 발표하지 못했으나 그의 전집 발간에 의해 재조명되기 시작한 이 논문은 좀더 최근에 카르납의 위와 같은 관점에 대한 비판과 옹호가 교차되는 초점이 되고 있다.

여기서 카르납에 대한 괴델 비판의 핵심은 수학의 이른바 '선험적 허용 가능성'(*a priori* admissibility)의 요건에 놓여 있다. 즉 "[...] 어떤 문장들의 참에 대한 규칙이 <구문론적>이라면, [...] 그 규칙이 어떠한 '사실적'[즉 '경험적'] 문장들의 참이나 거짓을 전혀 함축하지 않음을 미리 알 수 있어야만 한다"(ibid., p.339, 강조 원문)는 요건을 말한다. 이는, 앞서 제3절에서 언급한 대로, 카르납이 수학적이거나 논리적인 참이 전적으로 경험적 내용이 없는 순수히 형식적인 것이라 보고 있음을 겨냥한 것으로, 만일 위의 요건이 충족되지 않는다면 그와 같은 카르납의 시각은 전혀 근거 없는 것이 된다고 여겼기 때문이다. 그런데 이와 같은 요건의 충족 여부를 가릴 수 있는 것이, 괴델이 보기에는, 바로 일관성의 증명이다. 왜냐하면, 만일 어떤 체계가 비일관적이라면, 그것은 사실적 문장을 포함해 어떠한 문장이든 포함할 수 있으므로, 이를 방지하기 위해서는 <미리> 해당 체계에 대한 일관성 증명이 이루어져야 한다고 보는 것이다.

하지만 괴델의 이와 같은 요구는 근본적으로 괴델 이후 카르납의 체계 상대성에 대한 이해 부족에 기인한다. 앞서 제3절에서 언급한 대로, 카르납은 수학적 추론을 그 자체로 독립시켜 다루기보다는 좀더 폭넓게 자연 과학적 경험 명제까지를 포함할 수 있는 언어 체계 내에서 다루고자 하였다. 그러므로 『구문론』 내에서 언어 I과 II를 구성할 때에도 그는 "[각] 언어의 수학-논리적인 부분에만 한정하지 않고, [...] 본질적으로 그 종합적이고 경험적인 문장들에도 관여"(Carnap 1934/1937, p.xiv)하러

하고 있음을 볼 수 있다. 그리고 이 때 수학-논리적인 문장이 무엇이고 종합적이며 경험적인 문장이 무엇인가를 결정해 주는 것은 바로 그와 같은 문장들을 구별하고 그에 대한 규칙들을 규율해 주는 메타 언어로서의 ‘언어적 틀’(linguistic frame)일 뿐이다. 카르납은 이러한 언어적 틀에 의해 드러나는 경험적 ‘사실’ 이외의 별도의 사실은 인정하지 않는다. 그러나, 리켓츠나 골드화브의 지적대로(Ricketts 1994, Goldfarb 1995, Goldfarb & Ricketts 1992), 위에서와 같은 괴델의 비판은 바로 이와 같은 언어적 틀 이전에 미리 독립된 별도의 ‘사실’을 전제하고 있는 것으로 보인다. 즉 경험적 사실에 관해 ‘언어 초월적인 관념’(language-transcendent notion)을 전제하고 있는 것이다(Ricketts 1994, p.180). 그러므로 그는 언어적 틀에 상대적이지 않은 어떤 경험적 세계에서 미리 참이거나 거짓임이 밝혀질 수 있는 경험적 사실 문장들을 별도로 두고, 그에 대해 일관성이 증명된 수학 체계를 적용해야 하지 않는가라고 생각하는 것이다. 하지만 수학적 문장과 경험적 문장을 구별해 주는 것 자체가 언어적 틀이라면, 그 이전에 수학적 문장들의 체계에 관해 미리 일관성 증명이 이루어질 필요는 없다.

그러나 이 대목에서, 만일 이 때 괴델의 우려대로 문제의 수학이 실제 비일관적이라면 어떻게 되겠는가라는 반론이 있을 수 있다. 이 점에 관해 박일호(2007)는 매우 흥미로운 분석을 보여 주고 있다. 그는 카르납이 생각하는 것처럼 언어 상대적으로라도 수학의 선험적 허용 가능성 요구가 이어질 수 있다고 보고(나는, 바로 윗 단락에서의 논의대로, 그러하다고 믿지 않지만, 그럼에도 불구하고 어쨌든), 하나의 형식적 체계 내의 규칙들이 비일관적일 때 그로부터 과연 사실적 문장이 도출될 수 있는가를 카르납의 언어 구성 방식에 따라 검토하고 있다.

박일호도 잘 지적하고 있듯(같은 곳, 47쪽), 카르납은, 체계 상대성의 원칙에 어울리게, 형식 체계를 구성함에 있어 수학-논리적 기호의 의미를 먼저 규정하고 그 의미에 따라 추리 규칙의 올바른을 문제삼는 대신, 이와 반대로 먼저 추리 규칙을 자유롭게 임의로 선택하고 그에 의해 오히려 해당 기호들의 의미를 규정하는 방식으로 나아가고 있다(Carnap 1934/1937, p.xv). 그러므로 그는 이른바 ‘귀결 규칙’(consequence rule)

을 먼저 제시하고, 이에 의해 여러 주요한 구문론적 개념들을 규정하고 있다. 그런데 이처럼 규정되는 것들 가운데 ‘논리적 문장’과 ‘서술적 문장’(descriptive sentence)이 포함되고, 이에 따라 ‘논리적 언어’와 ‘서술적 언어’가 구별된다. 여기서 말하는 ‘논리적 문장’은 해당 문장이 결정적(determinate)임을 뜻하고, 이는 앞서 제3절에서 언급한 대로, 그 문장이 ‘분석적’이거나 아니면 ‘모순적’임을 뜻한다. 만일 이렇게 결정적이지 않은 문장이라면, 그것은 ‘서술적’이다. 그리하여 오로지 논리적 문장들(또는 표현들)만으로 이루어진 언어가 ‘논리적 언어’이고, 서술적 문장들(또는 표현들)까지 포함한 언어가 ‘서술적 언어’이다.

다른 한편, 카르납에게 있어 언어는 ‘L-규칙’과 ‘P-규칙’에 의해 구분되기도 한다. 예컨대 언어 $\mathcal{L}$ 내에서 어떤 문장 S 가 집합 K 의 귀결이라고 해 보자. 그리고 집합 K 와 문장 S 의 모든 서술적 표현들을 다른 서술적 표현들로 대치한 결과를 각기 K' 와 S' 라 한 경우, 이러한 대치 결과에도 불구하고 해당 언어 내에서 S' 이 여전히 K' 의 귀결일 때, 그 귀결 규칙을 ‘L-규칙’이라 한다. 그렇지 않은 귀결 규칙은 ‘P-규칙’이다. 문제의 언어 $\mathcal{L}$ 내에 오로지 L-규칙만이 존재한다면 그 언어는 L-언어이고, P-규칙까지 존재한다면 그 언어는 P-언어이다.

이러한 언어 구별에 따를 때, 『구문론』 내의 두 언어 I과 II는 모두 서술적 언어이되, L-언어이다(ibid. pp.181-2). 그런데 괴델이 선험적 허용 가능성의 요건을 문제삼을 때 그가 염두에 두는 언어는 P-언어이다. 왜냐하면 그 요건이 요구하는 바는 결국, 어떤 언어에 오로지 수학-논리적 규칙들만을 추가하는 경우, 그로 인해 기존의 사실적 문장 이외의 어떠한 사실적 문장도 새로이 추가되어서는 안 된다는 것이고, 따라서 이러한 요건을 문제삼기 위해서는 해당 언어에 P-규칙도 포함되어야 하기 때문이다. 이제 이와 같은 P-언어를 ‘ $\mathcal{L}_P$ ’라 해 보자. 그렇다면 이 언어 내에는 P-규칙에 따르며 서술적인 문장 $S_{\mathcal{L}_P}$ 가 존재해야 할 것이다. 그런데 이 언어에 새로운 <L-규칙> R_L 을 추가해 새로운 언어 $\mathcal{L}_P'$ 를 구성한다고 해 보자. 이 경우 박일호는 “언어 $\mathcal{L}_P$ 에 <상대적이었던> 문장 $S_{\mathcal{L}_P}$ 은 새로운 언어 $\mathcal{L}_P'$ 에 <상대적인> 문장 $S_{\mathcal{L}_P'}$ 이 된다”(박일호 2007, 50쪽, 강조 논자, 기호는 본 논문에서의 표기법에 따름)고 말하고 있다.

이것이 처음에 박일호가 이해하는 카르납식의 언어 상대성으로 보인다. 하지만 이 때 만일 그 R_L 이 $\mathcal{L}_P$ 내의 기존 규칙들과(또는 그 자체로) 비일관적이라면, 어떻게 될 것인가. 물론 이 경우라면, 그로써 $\mathcal{L}_P'$ 내의 모든 문장이 함축될 것이다. 하지만 이 때 이렇게 함축되는 <모든> 문장은 서술적인 문장이 아니라 바로 논리적인 문장이다. 왜냐하면 그렇게 함축되는 문장들은 모두 이미, 위에서 말한 의미대로, '결정적'이기 때문이다. 따라서 것처럼 함축되는 문장들 가운데 하나인 문제의 $S_{\mathcal{L}_P}$ 역시 하나의 논리적 문장일 뿐이다. 그러므로, 이어지는 박일호의 말대로, 카르납의 경우 "[...] 비일관적인 규칙이 도입되면 원래 경험적이었던 문장들이 언어-상대적으로 논리적 문장으로 바뀌어 <경험적 문장이란 존재하지 않게 되어> 그것을 함축할 수 없"(ibid., 52쪽, 강조 원문)게 된다.

하지만 사실 리켓츠나 골드화브가 카르납의 언어 상대성을 주장하고 괴델이 어떤 언어적 틀 이전에 미리 독립된 별도의 '사실'을 전제하고 있다고 지적했을 때에도 그것의 진정한 의미는 박일호가 바로 위에서 예로 든 바와 같은 것이라 생각한다. 만일 그렇지 않다면, 단지 동일한 하나의 문장이 여러 언어 내에 나타날 수 있다는 의미만으로 이 경우 '별도의 독립된 사실에 대한 부정'이란 말은 애초에 성립될 수 없는 것이기 때문이다. 따라서 박일호로부터의 위의 인용 구절 가운데 "언어 $\mathcal{L}_P$ 에 <상대적이었던> 문장 ... 새로운 언어 $\mathcal{L}_P'$ 에 <상대적인> 문장 ..." 부분에서 그 '상대적'이라는 말 역시 단순히 문제의 문장이 서로 다른 언어 내에 등장한다는 의미를 넘어 <이미> 것처럼 서로 다른 언어 내로 들어감에 따라 괴델이 주장하는 일관성 증명에의 요구가 불필요하게 된다는 의미로 받아들여야 할 것이다.¹⁹⁾ 이것이 바로 내가 위에서 "나는 ... 그러하다고 믿지 않지만, 그럼에도 불구하고 어쨌든"이라는 단서를 붙인 이유이다.

아무튼 만일 괴델 이후의 카르납의 체계 상대성의 성격을 이처럼 파악

19) 이 점에서, 박일호가 "허용 가능성에 대한 비순환적 증명 요구는 [경험적 문장의 언어 초월적] 개념을 사용하지 않고는 지지될 수 없다"는 리켓츠로부터의 인용문을 소개하면서도 그와 같은 리켓츠의 결론으로 나아갈 수 없다고 지적한 대목(박일호 2007, 46쪽)은 잘 이해가 되지 않는다.

한다면, 박일호가 잘 해명하고 있듯, 어떤 언어가 비일관적이라고 해서 그것을 어떤 절대적 기준에 의해 ‘올바르지 않은’ 것으로 배제할 이유는 없다. 그것은 오직, 위에서 예시한 대로, 비일관적 언어를 경험의 세계에 적용하기에는 ‘적절하지 않다’(그러한 이론으로부터 도출되는 모든 문장들이 결국에는 논리적인 것이 될 뿐이므로)는 정도의 프래그마틱한 단점에서 배제될 뿐이다. 이 점에서 박일호가 그의 (2007, 53쪽, 각주 23)에서 “프래그마틱한 단점을 지니지 않았다는 주장을 정당화하기 위해서 [...] 해당 언어들이 일관적이라는 보장이 다시 필요할 것이며, 따라서 [박일호가 위에서 보여 준 바와 같은] 해결책은 괴델의 비판을 벗어나지 못한다”라는 (자신의 논문에 대한 어떤 심사위원의) 반론을 소개하고, “카르납이 주장하는 것은 일관성에 대한 [반대의 증명](disproof)이 주어졌을 때 문제의 언어[가] 프래그마틱한 단점을 가진다는 것일 뿐, 일관성에 대한 증명(proof)이 있어야만 그 언어가 비일관성으로부터 비롯된 프래그마틱한 단점을 가지지 않는다는 것이 정당화될 수 있는 것은 아니[다]”라고 응답한 일은 적절하다고 여겨진다.²⁰⁾

사실, 위의 인용문에 소개된 바와 같은, 카르납에 대한 반론에 포함된 오해는 그다지 드물지 않은 것으로 보인다. 예컨대 이종권(2007)에 보이는 다음과 같은 언급은, 비록 매우 짝막하기는 하나, 바로 지금과 같은 오해의 한 단면으로 보인다. 즉 그는 벨납(N. Belnap)을 매개로, 프라이어(A. N. Prior)가 들고 있는 유명한 논리적 결합사 ‘tonk’(이종권은 이를 ‘★’로 표시)에 의한 두 가지 추리 규칙, $A \vdash A \star B$, $A \star B \vdash B$ 를 제시한 후, 카르납이 『구문론』의 “xv쪽에서 추론 규칙을 임의로 잡는다고 해도 그에 의해 기본적인 논리 기호[...]의 어떤 의미를 부여하는가가 결정

20) 본 논문에 대한 한 심사자 역시 “카르납의 관용의 원리를 비일관성[마저도] 허용할 만큼 관대한 것으로 만들 수 있는가” 하는 식으로 회의를 표명하고, 카르납이 말하는 프래그마틱한 단점을 지닌 “언어 혹은 구문론적 체계가 어떤 면에서 유용성을 가질지 이해하기 어렵다”고 지적하고 있다. 하지만 이 역시 카르납에 있어 유용성은 없다고 해야 할 것이다. 이 때 중요한 점은 그러한 언어 혹은 체계가 ‘올바르지 않다’는 것과 ‘유용하지 않다’는 것은 분명 다르다는 것이며, 카르납의 관용의 원리는 이러한 차이에서 이해해야 할 것이다.

된다고 말하고 있는데 [...] 위와 같은 연결어 ★에 대한 정의는 그러한 카르납의 견해가 명백히 잘못임을 보여준다”(이종권 2007, 75쪽 각주 17)고 지적하고 있는 것이다. 이종권의 원래 글에서 이러한 지적이 나오게 된 까닭은, ‘★’와 같은 논리적 결합사가 사용되면 “임의의 논리식 A와 B에 대해, $A \vdash B$ 와 같은 <바람직하지 않은>”(같은 곳, 75쪽, 강조 논자) 결과가 나오게 되므로, 이를 방지하기 위해 사전에 ‘ $\vdash$ ’의 맥락에 의거해 그러한 결합사의 정의를 제한하자는 것이다. 하지만 이러한 식의 문제에 관해서도 박일호가 잘 지적하고 있듯(2007, 51쪽, 각주 22), ‘tonk’와 관련되어 제시된 위의 두 추리 규칙과 같은 것 역시 일종의 비일관적 규칙으로서(지금의 추리 규칙들을 연속으로 사용하면 임의의 한 문장으로부터 해당 체계 내의 모든 문장을 도출해 낼 수 있으므로), 이에 대해서도 바로 위 단락에서와 같은 지적이 가능할 것이다. 이종권이 말하듯 카르납이 “추론 규칙을 임의로 잡는다고 해도” 그것은 프래그마틱한 기준에 의해 결코 임의는 아니며, 만일 이종권이 이러한 점을 떠나서 말한 것이 아니라면, 그로써 왜 기본적인 논리적 기호에 대한 의미 부여의 결정이 어려운지는 불분명하다.²¹⁾

이상과 같이 말한다면, 카르납의 체계 상대성과 관련한 일관성 증명에 관해 박일호는 상당히 카르납을 옹호하는 입장에 서 있는 것으로 보일지 모른다. 하지만 다른 한편으로, 박일호는 괴델의 또 다른 입장에 서서 카르납을 비판하며 일관성 증명의 필요성을 주장하고 있기도 하다. 하지만 나는 지금까지 해명한 카르납의 체계 상대적 입장에서 그러한 주장 역시 오해에 근거한 것임을 지적하고자 한다.

박일호가 괴델의 또 다른 입장에 서서 일관성 증명의 필요성을 주장하

21) 이와 관련해, 한 심사자는 “만일 tonk가 도입되기 이전에 &와 같은 연결어가 있었다고 하면 [...] 이제 [그러한] tonk와 &는 같은 의미가 되는가 아닌가?”라고 물으며 회의를 표명하고 있다. 만일 이 경우라면, 물론 그 의미는 서로 구별되지 않을 수 있다. 하지만 앞서의 논의대로 카르납 역시 프래그마틱한 이유로 이와 같은 결합사를 채택하지 않을 것이다. 이와 같은 결합사가 나타내는 문제는 (프래그마틱한) 결과적 얘기이지, 처음부터 어떤 절대적인 결합사의 의미가 존재하고, 그로부터 다른 모든 결합사의 의미가 구별되어야 하는 것은 아닐 것이다.

는 근거는 근본적으로 적어도 『구문론』 내에 나타나는 이른바 ‘구문론적 관점’(syntactical view)에 놓여 있다. 곧 수학적 직관을 사용하거나 어떠한 수학적 대상이나 사실도 지시함이 없이 수학을 경험과 독립적으로 타당한 문장들의 체계로 보려는 관점을 말한다(Gödel 1953/9/1995, p.335, note 5). 괴델은 이와 같은 규정으로부터 카르납에게 요구되는 중요한 두 가지가 있다고 본다. 즉 수학 자체에는 경험적 내용이 포함되어서는 안 된다는 무내용성예의 요구와, 그러한 수학을 경험 세계에 적용할 때 수학적 정리들이 그러한 세계에 적용되리라고 기대할 수 있다는, 확인 가능한 사실에 대한 기대 가능성(어쩌면 수학적 직관이 제공할 수 있을지도 모를)을 그러한 직관을 배제한 상태에서라도 제대로 설명할 수 있어야만 한다는 요구이다. 그리고 그는 이러한 두 요구를 모두 충족시키는 데에는 일관성의 증명이 필연적이라고 본다(ibid., pp.337ff.).

사실, 이 가운데 첫 번째 요구에 관해서는 이미 Awodey & Carus (2003, 2004)에서 비판을 행한 바 있다. 그들 비판의 핵심은, 수학의 무내용성으로부터 일관성 증명예의 요구는 논리적으로 직결되는 문제가 아니라는 것이다. 괴델이 수학의 무내용성으로부터 일관성 증명의 필요성으로 나아가는 고리는, ‘만일 그러한 수학의 체계가 비일관적이라면 그것은 경험적 귀결을 갖게 될 것이고, 만일 수학이 경험적으로 무내용적이라면 그것은 반드시 일관적이어야만 한다’는 것이다. 하지만 어워드와 캐러스는 이러한 고리로부터 도출되는 바는 단지 그러한 체계에는 <일관성>이 요구된다는 것뿐이지 <일관성의 증명>이 요구되는 것은 아니라고 지적한다. 이 경우, 박일호(2007, 39쪽)에서의 분석대로, 만일 위 고리 이전의 근본 전제로서 ‘구문론적 관점은 수학의 무내용성을 함축한다’ 대신 ‘구문론적 관점에 대한 <증명>은 수학의 무내용성에 대한 <증명>을 함축한다’와 같은 전제를 받아들인다면, 물론 논리적으로 일관성 증명의 필요성이 도출되었지만, 앞서 제3절에서 지적한 대로, 카르납의 관용의 원리에 따르면 이와 같은 수정은 카르납에게 허용될 수 없는 것이다. 왜냐하면 카르납의 관용의 원리에 따르면, 메타 언어에 반영된 구문론적 관점이든, 직관주의적 관점이든, 아니면 고전 수학적 관점이든, 그것은 모두 하나의 주장(assertion)이 아니라, 하나의 제안(proposal)으로 보아야 하기 때문

이다. 하나의 주장에 대해서라면 그것을 정당화시켜 줄 어떤 증거가 따라야 하지만, 하나의 제안에 대해서라면 그러한 증거는 불필요하다. 오로지 그러한 제안에 따른 어떤 프래그마틱한 효과만이 문제시될 뿐이다.

이 지점에 이르기까지는 박일호는 어위디와 캐리스의 분석, 그리고 카르납의 입장을 명확히 따라간 것으로 보인다. 그럼에도 불구하고 이후 그는 다음과 같이 말하고 있다.

[...] 구문론자들이 수학을 위해 어떤 언어를 구성한 경우를 생각해 보자. 그리고 해당 언어에서는 수학이 내용을 가지지 않기 때문에 어떤 프래그마틱한 장점을 가진다고 주장하여, 정당화를 요구받는 경우를 생각해 보자. 이 주장을 위해서는 무엇이 필요한가? 무엇보다도 먼저 그들은 해당 언어가 일관적이라는 것을 보여주어야 한다. 왜냐하면 일관성에 대한 증거가 없으면, 해당 언어는 비일관적일 수 있고, 따라서 그들은 그 언어가 어떤 프래그마틱한 장점을 가진다는 것을 참이라고 <주장>할 수 없기 때문이다. (박일호 2007, 41-2쪽, 강조 원문)

이 대목에서 박일호는 프래그마틱한 장점에 대해서도 증거가 필요하고, 이를 위해서는 일관성 증거가 필요함을 역설하고 있는 것이다. 하지만 이는 위에서 어떤 심사 위원의 반론에 대해 박일호 자신이 재반론을 편 점에 비춰서도 상충되며, 근본적으로는 위에서 말하는 “프래그마틱한 장점”이라는 것이 어떤 증명에 의해 밝혀지는 것이 아니라 문제의 언어 체계를 사용한 결과 나타나는 <효과>에 의해 밝혀지는 것이라는 점에서 “프래그마틱한 장점”이란 말의 의미에 대한 불충분한 이해에 기인한 것으로 보인다.

앞서 말한 두 번째 요구와 관련해서는, 괴델의 예를 따라 박일호는 다음과 같이 말하고 있다. 이제 수학적 직관이 수학을 해석하는 데 있어 하는 역할은 수학을 경험 과학에 적용했을 때 그 결론으로 함축되는 것이 실제로 관찰될 수 있으리라는 기대나 확신을 만들어 내는 것이다. 예컨대 기호들의 사용에 대한 어떤 규칙들을 단지 기계적으로 적용해 골드바흐의 추측을 도출해 내었다고 해 보자. 그렇다면 단지 임의적인 규칙들로 만들어진 그와 같은 도출 결과를 이용해, 어떤 짝수를 나타내는 숫자를 입력치로 하면, 소수를 나타내는 두 개의 숫자를 산출하는 기계를 만들어

낼 수 있으리라 마땅히 기대할 수 있겠는가? 또는 공학적 규칙들을 기계적으로 적용해 어떤 다리가 이러저러한 하중을 받게 되면 무너지리라는 결론을 도출해 냈다고 해 보자. 하지만 임의로 정해진 규칙들이라면, 이 경우 그 결론이 실제 관찰될 수 있으리라 기대할 수 있겠는가? 이러한 예들에서 우리가 실제 관찰할 수 있다고 기대하는 사실들이 바로 ‘확인 가능한 사실들’이다. 이러한 때 괴델은, 만일 별도의 수학적 직관을 배제하는 한, 우리가 것처럼 확인 가능한 사실들에 대한 기대를 갖기 위해서는 적어도 문제의 결론을 도출해 내는 데 사용되는 규칙들이 일관적이라는 것을 미리 알고 있어야만 한다고 주장한다. 그 이유에 관해 박일호는 다음과 같이 설명하고 있다.

[...] 만약 우리가 사용하는 규칙이 비일관적이라면 모든 경험적 문장들, 혹은 관찰될 수 있는 문장들을 함축할 수 있을 것이며, 따라서 골드바하의 추측이든, 다리에 대한 어떤 결론이든 모두 도출될 수 있을 것이다. 하지만 [이처럼] 도출된 결론이 실제로 관찰될 수 있을 것이라고 기대하는 것은 잘못이다. (박일호 2007, 35쪽)

그리고는 이에 비취 기대 가능성에의 요구는 “구문론자들이 자신의 해석을 참이라고 주장하는 것이 아니라, 그저 제안하는 경우라도 경험과학에 적용되기 위해서는 만족시켜야할 조건”(같은 곳, 42쪽)이라고 말하고 있다. 그러나 우리가 사용하는 규칙이 비일관적이어서 모든 경험적 문장들이 도출될 수 있는 경우는, 앞서도 지적한 대로, 카르납에게 있어서도 프래그마틱하게 배제할 수 있는 경우이다. 기대 가능성에의 요구와 관련해 괴델이 말하는 일관성의 증명이 결국 이러한 경우를 배제하기 위한 것이라면, 따라서 반드시 일관성 증명을 통해서만 그 일이 이루어져야 한다고 주장할 필요는 없어 보인다.

하지만 이제 무내용성에 관해서든 기대 가능성에 관해서든 그 어떠한 요구에 따라 일관성 증명의 필요성을 역설하는 위의 주장들은, 그에 대해 각기 제시한 나의 반론을 떠나서라도, 근본적으로 앞서 이미 지적한 언어 초월성의 문제를 고려하지 못하고 있는 것이다. 즉 어느 경우든 문제의 주장들은 모두 ‘어떤 체계가 비일관적이라면 그것은 <곧> 경험적 귀결을

갖게 될 것'이라는 식으로, 근본적으로 체계 초월적인 경험적 사실을 전제하고 있으나, 이에 관해서는 이미 비판이 이루어진 바 있다. (언어의) 체계 상대성과 관련해 박일호가 앞서 카르납을 옹호했으면서도 위의 두 요구와 관련해서는 이러한 점에 관해 전혀 언급하고 있지 않은 점은 의외라 생각한다.²²⁾

이상과 같이 괴델식의 오해에 직면하고 그에 대해 카르납의 체계 상대성의 진의(眞意)를 가지고 옹대할 수 있다면, 이제 괴델과 관련해 앞서 지적했던 점, 즉 카르납이 애초에 생각했던 체계란 단지 수학-논리적인 부분에만 한정되지 않고 본질적으로 종합적이고 경험적인 문장들에도 관련된 체계라는 점을 좀더 일반화시켜 부각시킬 필요가 있고,²³⁾ 이와 관련해 카르납의 다음과 같은 구절들은 매우 중요하다고 생각한다.

22) 이 지점에서 Tennant(2008, §3)의 다음과 같은 지적은 카르납의 체계 상대성의 적절성을 한층 높여 준다고 생각한다. 테넌트의 관찰에 따르면, 지금까지 허용 가능성 문제를 두고 괴델에 동조하는 사람이건 그렇지 않은 사람이건 공히 전제하고 있는 바가 있다고 한다. 바로 '어느 체계가 비일관적이라면, 그것은 곧 경험적 문장을 함축할 수 있다'는 전제이다. 이에 관해서는 앞서 카르납의 『구문론』 체계에서 그러하지 않을 수 있음을 논하기는 했지만, 이와는 달리 테넌트는 아예 그러한 전제 자체가 직관주의나 고전 논리의 관점을 반영할 뿐이라고 지적한다. 그러므로 예컨대 어느 모순된 전제로부터 그 어떠한 결론이든 도출될 수 있음을 허용치 않는 이른바 '모순 허용적 논리'(paraconsistent logic)나 '연관 논리'(relevant logic)의 관점을 도입한다면, 괴델이 문제삼는 허용 가능성의 문제는 원천 봉쇄될 것이고, 그 문제마저도 체계 상대적이 될 것이다. 다만, 테넌트의 이러한 지적은 모순 허용적 논리나 연관 논리의 향후 발전에 따라 재평가되어야 할 것이다.

23) 한 심사자는 이와 관련해 "괴델이 거론하는 '체계'가 수학의 형식 체계이고, 카르납이 문제 삼는 '체계'가 괴델의 그것과 다르다면, 그래서 '본질적으로 종합적이고 경험적인 문장들에도 관련된 체계'라면, 이미 그 자체로 상호쟁점은 상이한 것이 될 것"이라 지적하고 있다. 하지만 문제는, 이러한 차이와 그 파생 결과에 대해 괴델이나 힐베르트주의자들이 처음부터 명확히 인식하고 있지 못했었다는 것이다. 그러므로 이를 제대로 드러내는 작업이 필요하고, 이를 위해서라면 (심사자가 불필요하게 생각하는) 1절과 2절(심사자가 지적한 "2절과 3절"은 오히려 보임?)의 논의 역시 필요하다고 생각한다.

힐베르트는 자신의 메타 수학을 <오로지 대상 언어 내에서 정식화된 수학 체계의> 일관성을 증명하려는 특정 목적만을 위해 의도한 것이나, 이와는 달리 나는 언어 형식에 관한 일반 이론을 구성하는 데 목표를 두었다. (Carnap 1963, p.53, 강조 논자)

[...] <수학에 대한 논리적 기초의 작업은 메타 수학(즉 수학에 대한 구문론)만으로 충족될 수는 없다. 오직 논리—수학적 문장들과 종합적 문장들 모두를 포함한 하나의 총체적 언어에 대한 구문론에 의해서만 충족될 수 있을 뿐이다.> (Carnap 1934/1937, p.327, 강조 원문)

이와 같은 구절들에 주목한다면, 괴델이 카르납의 체계 상대성의 진의를 오해한 것은, 다시 역설적이게도, 괴델이 힐베르트에게 충격을 주었음에도 불구하고 그 자신 아직 어느 면에서는 힐베르트의 시각에 매여 있기 때문임을 알 수 있다. 즉 메타 수학을 오로지 대상 언어 내에서 정식화된 수학 체계의 일관성을 증명하려는 특정 목적만을 위해 의도했을 뿐이라는 점이다. 그리고 사실 이 점에서 보자면, 앞서 제2절에서 살펴본 대로, 괴델 이후의 힐베르트주의자들인 겐첸이나 페퍼만의 경우도 예외가 아니라고 생각한다.

그렇다면 바로 이러한 점 때문에 우리는 또한 다음과 같이 말할 수 있다. 괴델 이전의 힐베르트, 괴델 자신, 그리고 괴델 이후의 힐베르트주의자들 모두 다른 면에서는 서로 다를지 모르나, 그들 모두 카르납식의 언어적 틀에 상대적이지 않은 어떤 경험적 세계 내에서 독립적으로 참이거나 거짓임이 밝혀질 수 있는 경험적 사실 문장들을 두고, 이후 그에 대해 <별도로 마련된> 수학을 적용하려 했기 때문에 결국 <미리> 그 수학의 일관성 증명이 필수적이라고 생각할 수밖에 없었다는 것이다. 괴델 이후의 힐베르트주의자들이 그들의 일관성 증명을 체계 상대화하였다 할지라도, 그것은 카르납이 말하는 체계 상대화는 아니다. 이제 카르납식으로 수학적 문장과 경험적 문장을 구별해 주는 것 자체가 우리가 자유롭게 선택하는 언어적 틀이라면, 그러한 증명이 미리 이루어질 필요는 없다. 물론 미리 그러한 증명이 이루어질 수만 있다면 그 자체 나쁜 일을 아니나, 핵심은 적어도 그러한 증명이 미리 이루어질 필요는 없다는 것이다. 카르납이 반대하는 바는 일관성 증명 자체가 아니라, 일관성 증명의 강

박이라고 보아야 할 것이다.

결 어

지금까지 나는 피델 이후 힐베르트주의자들의 체계 상대성과 카르납의 체계 상대성이 의미하는 바가 각각 무엇이며, 그 의미의 차이가 어떻게 일관성 증명에의 강박 여부를 결정하는가를 보였다. 그리고 그러한 해명을 통해, 아직까지 남아 있는 카르납에 대한 오해 몇 가지를 풀어 보려 시도하였다.

물론 나의 이러한 해명이 카르납에 대한 좀더 진전된 연구들, 예컨대 『구문론』 이후 그의 의미론에 대한 연구,²⁴⁾ 카르납의 구문론에 대한 맥레인식의 범주 이론(category theory)²⁵⁾과 같은 맥락에서도 역시 여전히 유지될 수 있는가는 새로운 문제가 될 수 있다. 이에 관해서는 이후의 과제로 넘기기로 한다.

²⁴⁾ 예컨대 Carnap(1939), (1942), (1943), (1947/1956) 참조.

²⁵⁾ 예컨대 Mac Lane(1986); Awodey(1996), (2004) 참조.

참고문헌

- 박일호 (2007), 「괴델과 카르납: 수학은 언어의 구문론인가?」, 『과학철학』 제10권 제1호, 한국 과학 철학회, 27-56쪽.
- 이종권 (2007), 「논리적 귀결과 논리 상황의 의미」, 『논리연구』 제10권 제1호, 한국 논리학회, 65-98쪽.
- 전영삼 (2008), 「공간론에서 힐베르트와 카르납」, 『과학철학』 제11권 제2호, 한국 과학 철학회, 1-34쪽.
- Awodey, S. (1996), "Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective," *Philosophia Mathematica* 4, pp.209-37.
- Awodey, S. (2004), "An Answer to G. Hellman's Question 'Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?'" *Philosophia Mathematica* 12, pp.54-64.
- Awodey, S. (2007), "Carnap's quest for analyticity: the *Studies in Semantics*," in M. Friedman & R. Creath (eds.), *The Cambridge Companion to Carnap*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, pp.226-47.
- Awodey, S. & A. W. Carus (2003), "Carnap versus Gödel on Syntax and Tolerance," in Parrini, P. et al. (eds.), *Logical Empiricism: Historical and Contemporary Perspectives*, Pittsburgh: Univ. of Pittsburgh Press, pp.57-64.
- Awodey, S. & A. W. Carus (2004), "How Carnap Could Have Replied to Gödel," in S. Awodey & C. Klein (eds.), *Carnap Brought Home: The View from Jena*, Chicago: Open Court, pp.203-23.
- Awodey, S. & A. W. Carus (2007), "Carnap's dream: Gödel, Wittgenstein" and *Logical Syntax*, *Synthese* 159, pp.23-45.
- Carnap, R. (1927), "Eigentliche und Uneigentliche Begriffe," *Symposion I*, pp.355-74.

- Carnap, R. (1928), *Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik*, hrsg. von T. Bonk & J. Mosterin, Darmstad: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 2000.
- Carnap, R. (1932), "Über Protokollsätze," *Erkenntnis* 3, pp.215-28.
- Carnap, R. (1934) *Logische Syntax der Sprache*, English trans. *Logical Syntax of Language*, London: Routledge & Kegan Paul, 1937.
- Carnap, R. (1939), *Foundations of Logic and Mathematics*, Chicago: Univ. of Chicago Press.
- Carnap, R. (1942), *Introduction to Semantics*, Cambridge: Harvard Univ. Press.
- Carnap, R. (1943), *Formalization of Logic*, Cambridge: Harvard Univ. Press.
- Carnap, R. (1947/1956), *Meaning and Necessity: A Study of Semantics and Modal Logic*, 1st and 2nd eds., Chicago: Univ. of Chicago Press.
- Carnap, R. (1963), "Carnap's Intellectual Autobiography" n P. A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Rudolf Carnap*, La Salle: Open Court, pp.3-84.
- Copi, I. M. (1979), *Symbolic Logic*, 5th ed., New York: Macmillan.
- Detlefsen, M. (1986), *Hilbert's Program: An Essay on Mathematical Instrumentalism*, Dordrecht: D. Reidel.
- Feferman, S. (1988), "Hilbert's Program Relativised: Proof-Theoretical and Foundational Reductions," *The Journal of Symbolic Logic* 53, pp.364-84.
- Friedman, M. (1988), "Logical Truth and Analyticity in Carnap's 'Logical Syntax of Language,'" eprinted as "nalyticity in Carnap's *Logical Syntax of Language*" n *Reconsidering Logical Positivism*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999, pp.165-76.

- Friedman, M. (1999), "Tolerance and Analyticity in Carnap's Philosophy of Mathematics" in *ibid.*, pp.198-233.
- Gentzen, G. (1936), "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie," English trans. in M. E. Szabo (ed.), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Amsterdam: North-Holland, 1969, pp.132-213.
- Gentzen, G. (1936-7), "Der Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik," English trans. in M. E. Szabo (ed.), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, *ibid.*, pp.223-33.
- Gödel, K. (1930), "Vortrag über Vollständigkeit des Funktionenkalküls," in *Collected Works*, Vol. III, Oxford: Oxford Univ. Press, 1995, pp.16-29.
- Gödel, K. (1931), "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I" in *Collected Works*, Vol. I, Oxford: Oxford Univ. Press, 1986, pp.144-95.
- Gödel, K. (1932), "Correspondence with Rudolf Carnap," in *Collected Works*, Vol. IV, Oxford: Oxford Univ. Press, 2003, pp.342-56.
- Gödel, K. (1933), "Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie," in *Collected Works*, Vol. I, *op. cit.*, pp.286-95.
- Gödel, K. (1953/9), "Is mathematics syntax of language?" version III/V, in *Collected Works*, Vol. III, *op. cit.*, pp.334-55.
- Gödel, K. (1958), "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes," *Dialectica* 12, pp.280-7.
- Goldfarb, W. (1995), "Introductory note to *1953/9", in *Gödel's Collected Works*, Vol. III, *op. cit.*, 1995, pp.324-34.
- Goldfarb, W. (2005), "On Gödel's Way In: The Influence of Rudolf

- Carnap," *The Bulletin of Symbolic Logic* 11, pp.185-93.
- Goldfarb, W. & T. Ricketts (1992), "Carnap and the Philosophy of Mathematics," in D. Bell & W. Vossenkuhl (eds.), *Wissenschaft und Subjektivität: Der Wiener Kreis und die Philosophie des 20. Jahrhunderts*, pp.61-78.
- Hallet, M. (1994), "Hilbert's Axiomatic Method and the Laws of Thought," in A. George (ed.), *Mathematics and Mind*, New York: Oxford Univ. Press, pp.158-200.
- Hilbert, D. (1899a), *Grundlagen der Geometrie*, English trans. *The Foundations of Geometry*, Merchant Books, 2007.
- Hilbert, D. (1899b), "Hilbert to Frege 29.12.1899," in G. Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, op. cit., pp.38-43.
- Hilbert, D. (1900), "Über den Zahlbegriff," English trans. in W. B. Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Vol. II, Oxford: Oxford Univ. Press, 1996, pp.1089-96.
- Hilbert, D. (1905), "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik," English trans. in J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1897-1931*, Cambridge: Harvard Univ. Press, 1967, pp.129-38.
- Hilbert, D. (1918), "Axiomatisches Denken," English trans. "Axiomatic Thought" in Ewald(ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Vol. II, Oxford: Oxford Univ. Press, 1996, pp.1105-15.
- Hilbert, D. (1926), "Über das Unedliche," English trans. in J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1897-1931*, Cambridge: Harvard Univ.

- Press, 1967, pp.367-92.
- Hilbert, D. & W. Ackermann (1938), *Grundzüge der Theoretischen Logik*, 2nd ed., English trans. *Principles of Mathematical Logic*, New York: Chelsea, 1950.
- Hilbert, D. & P. Bernays (1934), *Grundlagen der Mathematik*, Vol. I, Berlin: Springer.
- Mac Lane, S. (1986), *Mathematics, Form, and Function*, New York: Springer.
- Potter, M. (2000), *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap*, Oxford: Oxford Univ. Press.
- Reck, E. H. (2007), "Carnap and modern logic," in M. Friedman & R. Creath (eds.), *The Cambridge Companion to Carnap*, op. cit., pp.176-99.
- Ricketts, T. (1994), "Carnap's Principle of Tolerance, Empiricism, and Conventionalism," in P. Clark & B. Hale (eds.), *Reading Putnam*, Cambridge: Blackwell, pp.176-200.
- Ricketts, T. (2007), "Tolerance and logicism: logical syntax and the philosophy of mathematics," in M. Friedman & R. Creath (eds.), *The Cambridge Companion to Carnap*, op. cit., pp.200-25.
- Sieg, W. (1988), "Hilbert's Program Sixty Years Later," *The Journal of Symbolic Logic* 53, pp.338-48.
- Tennant, N. (2008), "Carnap, Gödel, and the Analyticity of Arithmetic", *Philosophia Mathematica* (III), pp.100-12.
- Weyl, H. (1921), "Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik," English trans. in P. Mancosu (ed.), *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford : Oxford Univ. Press, 1998, pp.86-118.

Zach, R. (2003), "Hilbert's Program," Stanford Encyclopedia of Philosophy, <http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/>.

Hilbert and Carnap after Gödel:
With a Focus on the Problem of System Relativity

Young-Sam Chun

In this paper, I examine the differences in the meanings of system relativity between the Hilbertians and Carnap after Gödel. And it is shown how the differences lead to whether or not it is thought to be necessary to prove the consistency of a system. As a result of this work, I illustrate an usefulness of the work by showing how it solves clearly some misunderstandings that still remain until now.

[Key Words] Hilbert, Carnap, Gödel, system relativity, proof of consistency